МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Харитонов Михаил Алексеевич

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ СИММЕТРИЧНЫХ ПОТОКОВЫХ ИЕРАРХИЙ

05.13.01— «Системный анализ, управление и обработка информации»
(информационные технологии и промышленность)

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А.А.Воронин

ВОЛГОГРАД
2017

Оглавление

Введение **5**

Глава 1. Модели и алгоритмы оптимизации симметричных иерархических структур потоковых производственных систем **20**

1.1 Модели симметричных иерархические структур в системах с потоками 20

1.1.1 Модели симметричных иерархических структур в организационных системах 20

1.1.2 Модели симметричных иерархических структур в технических системах 22

1.1.3 Модели симметричных иерархических структур в системах об работки информации 24

1.1.4 Модели симметричных иерархических структур в итерационных производственных процессах 26

1.1.5 Модели симметричных иерархических структур учебного процесса в вузе. 30

1.2 Формализация структурно-функциональных моделей иерархических структур производственных подсистем предприятий 31

1.2.1 Структурно зависимые производственные функции леонтьевского типа 31

1.2.2 Модель сложного преобразователя 33

1.2.3 Модель комплексного преобразователя 34

1.2.4 Модель специализированного преобразователя 35

1.2.5 Модель универсального преобразователя 36
1.3 Алгоритм оптимизации иерархических структур производственных подсистем предприятий 37
1.3.1 Формализация и постановка задач оптимизации 37
1.3.2 Алгоритм оптимизации 54
1.3.3 Имитационное моделирование зависимости оптимальных симметричных иерархических структур от параметров 64
1.4 Аналитические оценки эффективности оптимальных иерархических структур производственных подсистем предприятий 79
1.4.1 Структура сложного преобразователя 79
1.4.2 Структура комплексного преобразователя 91
1.5 Выводы 92

Глава 2. Оптимальное управление иерархической структурой производственной подсистемы предприятия со структурно зависимой производственной функцией леонтьевского типа 93
2.1 Формализация и постановка задачи оптимального управления . . . 93
2.1.1 Алгоритм решения и параметризация задачи оптимального управления 95
2.2 Решение задачи оптимального управления многошаговым методом динамического программирования 96
2.2.1 Комплексный преобразователь 97
2.3 Формализация и постановка задачи оптимального управления в условиях неопределенности 99
2.4 Имитационное моделирование неопределенности и решения задачи оптимального управления многошаговым методом динамического программирования 100
2.5 Выводы 102

Глава 3. Модели и алгоритмы управления и сценарно-имитационного моделирования динамики структуры малых искусственных русел пойменных территорий **104**

3.1 Системный анализ и имитационное гидродинамическое моделирование динамики паводковых вод на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы 105

3.1.1 Системный анализ паводковых явлений на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы 105

3.1.2 Имитационное гидродинамическое моделирование динамики паводковых вод на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы 107

3.2 Задача оптимизации структуры искусственных малых русел пойменной территории с управляемым поперечным сечением 111

3.2.1 Постановка задачи 111

3.2.2 Алгоритм решения 114

3.2.3 Результаты численной реализации алгоритма 116

3.3 Сценарно-имитационное моделирование долгосрочной динамики оптимальной структуры искусственных малых русел Волго—Ахтубинской поймы 122

Выводы **125**

Литература **127**

Приложения **142**

Приложение А. Структура программных комплексов и организация данных. 142

Приложение Б. Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ . . 159

Приложение В. Акты внедрения 161

Введение

Актуальность.

В математических моделях сложных систем понятие структуры является, пожалуй, центральным. В системном анализе под структурой понимается способ (алгоритм) связи между элементами системы, образующий системную целостность [4; 6; 7; 44], и многообразие типов элементов всякой сложной системы определяет и многообразие ее структур.

Задачи оптимизации и управления потоками в сетях и иерархических структурах имеют многочисленные содержательные интерпретации и практически важные приложения: транспортные (в том числе водные, газотранспортные, нефтепроводы) энергетические, информационные потоки, потоки факторов производства и др. На фоне большого числа моделей и методов управления самими потоками задачам управления структурой сетей уделяется сравнительно мало внимания. Исключением являются алгоритмы оптимизации структуры телекоммуникационных и компьютерных сетей, основанные на методах теории массового обслуживания (теории очередей) вследствие стохастического характера поступления данных и недетерминированной обработки их в узлах коммутации и каналах связи.

Между тем эффективное управление структурой, с одной стороны, расширяет область поиска оптимальных потоков, с другой — позволяет снижать затраты на поддержание избыточной постоянной структуры.

Анализ работ по структурной оптимизации позволяет сделать вывод о наличии двух методологических подходов. Первый подход — дедуктивный — является попыткой создания теории иерархических структур. Согласно этому подходу вид оптимальной структуры без априорных ограничений на ее вид определяется

общими свойствами целевой функции (секционная, однородная и т.п.), а конкретные содержательные модели исследуются в рамках общей теории. Среди авторов, развивающих первый подход, можно назвать Новикова Д.А. [55; 56], Воронина А.А. и Мишина С.П. [9–12; 46; 49–53], Губко М.В. [22–29], Дементьева В.Т., Ерзина А.И. и др. [31], Рожихина П.В. [61–63] и др.

Второй подход — индуктивный — построение частных моделей с сильным содержательным ограничением на вид иерархической структуры и конкретным видом целевой функции, определяемыми моделируемой системой или процессом.

Среди авторов, работающих в рамках этого подхода, можно назвать Сафронова В.В. и др. [38; 39; 47], Цирлина А.М. [77] и др, Adizes I. [1; 82], Bailly G., Oulasvirta A. и др [88; 110], Blake R.R. и Mouton J.S. [90], Champy J. [98], Grant R.M и др. [101], Kauffman S. [104], Mincberg G. [48], Sheu C.Y. и Prager W. [115], Tran Q. и Tian Y. [123], Troiano L., Birtolo C., Armenise R. [124], Watzlawick P. и др. [127], Weick K.E. и Quinn R.E. [128], Yang W.H. [130].

Достоинства первого подхода — универсальность, широта охвата, высокая обоснованность результатов, недостатки — трудность применения к конкретным задачам управления. Второй подход является антиподом первого, сочетая в себе высокую пригодность для решения конкретных задач управления и столь же высокую трудность обобщения и переноса на другие системы. Таким образом, актуальным является создание методов оптимизации и управления систем, иерархические структуры которых обладают свойствами упорядоченности (симметрии, самоподобия, повторяемости), постулируемыми на основе содержательных интерпретаций и облегчающими создание аналитических и численных алгоритмов структурной оптимизации и управления. Этот подход сочетает в себе в некоторой степени достоинства и недостатки дедуктивного и индуктивного подходов.

Одним из классов систем со структурной симметрией являются производ-

ственные системы с переменными потоками факторов производства. Возможность управления структурой производственной подсистемы лежит в основе адаптивности предприятия, обеспечивающей его эффективное функционирование в условиях внешних и внутренних изменений. Другим классом таких систем являются рассматриваемые далее производственные и технические системы, реализующие итерационные процессы с потоками факторов производства. При широком варьировании параметров преобразуемого фактора (природного, технического, человеческого) оптимальное число итераций его преобразования является искомой величиной.

Идея, лежащая в основе развиваемого подхода, состоит в возможности представления любой производственной функции предприятия в виде суперпозиции производственных функций Леонтьева, вид которой определяется технологической структурой каждого конкретного производственного процесса. Поддержание максимальной эффективности ПФ производственной подсистемы предприятия в условиях изменений (флуктуации) факторных пропорций возможно посредством изменения технологической структуры, состоящего в дополнении потенциально каждого ее элемента некоторой вспомогательной структурой, и, таким образом, общее изменение технологической структуры является совокупностью таких «элементарных дополнений». Условия, процессы и результаты «элементарных дополнений» технологической структуры являются предметом настоящего исследования.

Более точно, предполагается, что структура производственной подсистемы предприятия состоит из базовой (неизменной) и переменной вспомогательной структур. Базовая структура может быть представлена графом, вершины которого отвечают элементам технологии с фиксированными факторными пропорциями. Изменения внутренней и внешней среды организации приводят к отклонениям факторных пропорций от их наиболее эффективных значений потенциально в каждой вершине технологического графа. Смягчение или ликви-

дация этих отклонений является целью создания вспомогательной структуры, потенциально встраиваемой между всеми парами вершин базового графа. Оптимальное управление вспомогательной структурой придает свойство адаптивности всей структуре производственной подсистемы предприятия. В настоящей работе базовая технология представлена одной вершиной.

Еще одним классом таких систем являются ирригационные системы, представителем которых являются рассматриваемые далее искусственные русловые системы пойменных территорий. Деградация природных русел пойменных систем вследствие зарегулированности паводков на крупных реках в сочетании с социохозяйственным освоением их территории актуализирует создание искусственных русловых систем. Требования социохозяйственной безопасности и экологической эффективности паводковых затоплений территории при ограниченной управляемости паводковых водных потоков придают, с одной стороны, актуальность задачам управления их структурой, с другой, затрудняют возможность их исследования междисциплинарностью, требующей участия геоинформационного и численного гидродинамического моделирования при подготовке данных для решения собственно оптимизационных задач, и, следовательно, колоссальная вычислительная сложность получения решений в допустимой области внешних и внутренних параметров, а также анализа погрешности управления, растущей вместе с ростом структурной сложности системы.

Среди авторов работ по численному моделированию паводковой динамики и ее зависимости от параметров русловых систем и рельефа следует отметить Ali A., Baldassarre G., Solomatine D. [83], Afouda A.A., Badjana H.M. и др. [103], Castellarin A., Ciullo A. и др. [116], Kvocka D., Falconer R.A., Brayvoronaa M. [109], Devkota J., Fang X. [97]. В их работах исследуется влияние величины поперечных сечений русел на процесс затопления, а также анализируется взаимодействие регулируемых водосбросов с поступлениями воды от притоков и приливов. Вопросы оптимальности русловой структуры обсуждаются ими

лишь на качественном уровне.

Объект исследования. Симметричные иерархические структуры потоков различной природы в производственных, природных и технических системах.

Предмет исследования. Свойство оптимальности и управляемости симметричных иерархических структур потоков различной природы в производственных, природных и технических системах.

Цель исследования. Повышение эффективности функционирования производственных и технических систем с потоками за счет разработки аналитических и численных методов управления их симметричными иерархическими потоковыми структурами. Достижение этой цели требует решения следующих основных задач:

1. Структурно-функциональный анализ конкретных производственных и технических систем с потоками;
2. Постановка и формализация задач оптимального управления симметричными иерархическими структурами производственных и технических систем;
3. Разработка методов и алгоритмов численного решения задач оптимизации и оптимального управления симметричными иерархическими структурами производственных и технических систем;
4. Получение аналитических оценок эффективности решения формальных задач оптимизации некоторых симметричных иерархических структур;
5. Программная реализация разработанных методов и алгоритмов численной оптимизации и оптимального управления иерархической структурой в частных моделях технических систем и производственных подсистем предприятий;
6. Сценарно-имитационное компьютерное моделирование функционирования оптимальных структур технических систем и производственных подсистем предприятий в широком диапазоне параметров.

Методы исследования. В работе применяются методы математического и сценарно-имитационного моделирования, оптимизации и оптимального управления, теории графов и математической экономики.

Научная новизна. Разработаны методы и алгоритмы численной оптимизации и оптимального управления иерархическими структурами, описываемыми n-дольными иерархическими графами и порожденными подграфами со структурнозависимыми целевыми функциями, представимыми в виде суперпозиций элементарных целевых функций, заданных в их вершинах. На их основе построены и программно реализованы формальные модели и алгоритмы аналитической и численной оптимизации и оптимального управления симметричными иерархическими структурами производственных потоков предприятий со структурно зависимыми производственными функциями леонтьевского типа, а также структурами искусственных русловых систем пойменных территорий, оптимизирующих паводковые водные потоки.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата и подтверждается результатами численной оптимизации и оптимального управления, а также соответствием результатов, полученных различными методами системного анализа.

Практическая и теоретическая ценность. Созданные методы и алгоритмы могут найти применение при оптимизации и управлении производственными, транспортными, энергетическими, водными, информационными и другими потоками.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Предложены формализации задач оптимизации и оптимального управления симметричными иерархическими структурами производственных подсистем предприятий, реализующих итерационные технологические процессы, а также задач оптимизации симметричных иерархических структур ирригационных систем.

2. Предложены и программно реализованы методы и алгоритмы численной оптимизации и оптимального управления иерархическими структурами, описываемыми n-дольными иерархическими графами и порожденными подграфами со структурно зависимыми целевыми функциями, представимыми в виде суперпозиции элементарных целевых функций, заданных в их вершинах.
3. Получены аналитические оценки решения нескольких частных задач оптимизации иерархических структур, описываемых n-дольными иерархическими графами и порожденными подграфами с целевыми функциями, представимыми в виде суперпозиции элементарных целевых функций, заданных в их вершинах.
4. В результате проведенного с помощью имитационного моделирования исследования зависимости вида оптимальных структур и оптимальных режимов управления производственных систем, реализующих итерационные технологические процессы в условиях нестационарности факторов производства, от параметров их внутренней и внешней среды установлено, что:
   - 4.1. поиск оптимальной структуры с целевой функцией, представимой в виде суперпозиции элементарных производственных функций леонтьевского типа, заданных в вершинах структурного графа, сводится к поиску оптимальной размерности рекурсивно заданного семейства задач линейного программирования с изменяющимся числом переменных и балансовых соотношений;
   - 4.2. рост меры отклонения фактических пропорций факторов производства от нормативных ведет к росту сложности оптимальной структуры;
   - 4.3. рост неопределенности в оценке факторов производства ведет к снижению сложности оптимальной структуры;
   - 4.4. поиск оптимального управления структурой в условиях динамичности факторов производства сводится к решению многошаговой задачи ди-

намического программирования, в которой оптимизация функции Беллмана на каждом временном шаге сводится к решению семейства задач линейного программирования с изменяющимся числом переменных и балансовых соотношений;

4.5. решения задачи оптимального управления структурой группируются в оптимальные режимы, характеризуемые параметрами средней структурной сложности и изменчивости, и определяемые отношением затрат на содержание и изменение структуры;

4.6. мера неопределенности динамики факторов производства определяет меру неопределенности оптимальных динамических режимов структуры.

5. В результате проведенного с помощью имитационного моделирования исследования зависимости вида и динамики оптимальных структур искусственных русловых систем пойменных территорий с управляемым поперечным сечением от параметров территории и паводковых режимов и тенденций их изменения установлено, что:

5.1. поиск оптимальной структуры искусственных русловых систем с изменяющейся пропускной способностью русел сводится к поиску оптимальной размерности рекурсивно заданного семейства задач выпуклого математического программирования с изменяющимся числом переменных и балансовых соотношений;

5.2. оптимальная структура искусственных русловых систем определяется объемом паводковых вод, размером и неоднородностью территории, а также возможностью управления пропускной способностью русел;

5.3. рост объема паводковых вод до определенной величины сопровождается ростом сложности оптимальной русловой структуры, при дальнейшем росте объема паводковых вод чувствительность характера затопления территории к структуре русловой системы монотонно падает;

5.4. рост размера территории может сопровождаться как снижением, так и ростом сложности оптимальной русловой структуры в зависимости от величины объема паводковых вод;

5.5. пропорциональный рост размера затопляемой территории и объема паводковых вод сопровождается ростом сложности оптимальной русловой структуры;

5.6. рост неоднородности территории сопровождается ростом сложности оптимальной русловой структуры;

5.7. возможность управления пропускной способностью русел увеличивает сложность их оптимальной структуры;

5.8. рост объема паводковых вод до определенной величины не снижает возможности и эффективности управления пропускной способностью русел, при дальнейшем росте объема паводковых вод возможность и эффективность управления монотонно падают;

5.9. рост неопределенности в оценке объема паводковых вод снижает сложность оптимальной русловой структуры.

Апробация результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: 6th Workshop Nonlinear PDEs and Financial Mathematics (Zittau, Germany, 2015), международной научно - практической мультиконференции «Управление большими системами — 2011» (Москва, 2011), международной научно-практической конференции «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах (УТЭОСС — 2012)» (Санкт-Петербург, 2012), 6-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2013) (Дивноморск, 2013), Тринадцатой Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство» (г. Старый Оскол, 2016 г.), Международной научно-технической конференции «Пром — Инжиниринг» (ICIE-2017) (Санкт-

Петербург, 2017), XII Международной научно-практической конференции «Современные сложные системы управления» (HTCS 2017) (Липецк, 2017), X–XIV Всероссийских школах-конференциях молодых ученых «Управление большими системами» (Уфа (2013), Арзамас (2014), Волгоград (2015), Самара (2016), Пермь (2017)), XVI–XX Региональных конференциях молодых исследователей Волгоградской области «Физика и математика» (Волгоград, 2011-2015), Научной сессии ВолГУ «Математика и информационные технологии» (Волгоград, 2011-2014).

Результаты диссертационного исследования дважды докладывались на семинарах чл. корр. РАН Д.А. Новикова (ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН).

Исследования по оптимизации русловой структуры пойменной территории выполнялись по плану Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 2.852.2017/4.6), а также в ходе выполнения научно-исследовательских работ следующим проектам: проект (договор № 284), «Создание компьютерной системы поддержки принятия решений по улучшению гидрологического режима северной части Волго-Ахтубинской поймы: проведение экспертиз гидротехнических сооружений, имитационное моделирование, синтез оптимальных механизмов эколого-экономического управления», финансируемый Правительством Волгоградской области (2014 г.); проект № 14-12-34019 РГНФ а(р) и Администрации Волгоградской области «Проектирование механизмов эколого-экономического управления территориями с низкой социально-экономической устойчивостью» (2015-2016 г.г.); проект № 16-48-340147 РФФИ и Администрации Волгоградской области «Проектирование системы управления паводковым гидрологическим режимом северной части Волго—Ахтубинской поймы на основе геоинформационного и гидродинамического моделирования» (2016-2017 г.г.).

Публикации. Основное содержание диссертации изложено в 25 научных публикациях. Из них четыре статьи в издании из перечня ВАК [14; 18; 19; 57],

две статьи в научных журналах, входящих в наукометрическую базу WEB OF SCIENCE [107; 126], одна статья в научном журнале, входящем в наукометрическую базу SCOPUS [106], одна статья в рецензируемом журнале [17], а также статьи в сборниках двух международных [13; 15] и семи российских конференций [16; 68–73]. Кроме того, получено 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ (Приложение Б).

Личный вклад соискателя. Все результаты по оптимизации и оптимальному управлению иерархическими структурами, представленные в диссертации и вошедшие в работы [14; 16–19; 57; 106; 126], опубликованные в соавторстве, получены лично автором. Автором разработаны и программно реализованы формализации, методы и алгоритмы решения задач оптимизации и оптимального управления симметричными иерархическими структурами. Постановка задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Работа соответствует следующим пяти пунктам паспорта специальности 05.13.01 —- «Системный анализ, управление и обработка информации»:

2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

5. Разработка специального математического и программного обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

7. Методы и алгоритмы структурно-параметрического синтеза и идентифи-

кации сложных систем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 162 страницах. Библиография включает 130 наименований. Рисунки и таблицы нумеруются по главам.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель, задачи, научная и практическая ценность работы, описана структура диссертационного исследования.

Первая глава содержит результаты оптимизации иерархических структур производственных подсистем предприятий.

В п. 1.1 приводится обзор, характеристика и анализ современного состояния научных отечественных и зарубежных исследований иерархических систем с потоками различного назначения. Анализ структур производственных и технических систем позволяет заключить, что описанные технологические процессы описываются порожденными подграфами полного n-дольного графа.

В п. 1.2 вводятся основные иерархические структуры, каждая из которых представляет собой семейство иерархических графов (ориентированный граф без циклов), число вершин и ребер графа зависят от параметров.

В п. 1.3 на основе анализа иерархических структур предыдущего пункта представлены модели описания и методы формализации задач оптимизации иерархической структуры производственных подсистем предприятий с целевой функцией, представимой в виде суперпозиции элементарных производственных функций (ПФ) леонтьевского типа, заданных в вершинах структурного графа. Представлены результаты решения задач оптимизации иерархических структур производственных подсистем предприятий, а так же имитационного моделирования зависимости оптимальных симметричных иерархических структур от параметров.

В п.1.4 для некоторой области значений внешних параметров получены ана-

литические оценки оптимальных значений целевой функции, оформленные в виде утверждений.

Вторая глава посвящена моделям оптимального управления иерархическими структурами производственных подсистем предприятий в условиях определенности и неопределенности. Показаны результаты решения задачи оптимального управления иерархическими структурами производственных подсистем организации многошаговым методом динамического программирования и имитационного моделирования неопределенности.

В третьей главе рассматриваются задачи оптимизации и сценарно-имитационного моделирования динамики структуры малых искусственных русел пойменных территорий.

В п. 3.1 проведен системный анализ работ по имитационному гидродинамическому моделированию динамики паводковых вод на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы.

В п. 3.2 представлена формальная постановка и решение задачи оптимизации структуры искусственных малых русел пойменной территории с управляемым поперечным сечением.

В п. 3.3 представлено сценарно—имитационное моделирование долгосрочной динамики оптимальной структуры искусственных малых русел Волго—Ахтубинской поймы.

Заключение содержит список основных результатов, полученных в работе.

В приложениях приведены блок-схемы и описания основных алгоритмов диссертационного исследования, Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ и акты о внедрении результатов работы.

Список основных обозначений

$\{R_i\}_{i=1}^m$	$\{R_i\}_{i=1}^m = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$. Обозначение компонент вектора с одним индексом (цикл по переменной i).
$R_{l,j}^{i,k}$	величина фактора R^k произведенного на i-м ПП УП и используемого на l-м ПП УП для фактора R^j.
$\varphi(n,m)$	вектор факторных потоков
$\{\{R_j^i\}_{j=i+1}^n\}_{i=0}^n$	обозначение компонент вектора с двумя индексами (два вложенных цикла: внешний цикл по i, внутри которого цикл по j).
$u(n,m)$	количество ограничений в задаче ЛП
$p(n,m)$	количество переменных в задаче ЛП
$\varphi^*(n,m)$	Вектор оптимальных факторных потоков (решение оптимизационной задачи)
$d(v)$	число дуг с началом в вершине v
$\Phi(n(t), R(t))$	значение ПФ иерархической структуры производственной подсистемы предприятия в момент времени t
$\gamma > 0$	коэффициент добавленной стоимости
$\Xi(n(t))$	функция затрат на управление иерархической структурой производственной подсистемой предприятия
$U(\Delta n(t))$	функция затрат на изменение (перестроение) иерархической структуры производственной подсистемы предприятия
μ	средняя сложность оптимальной иерархической структуры производственной подсистемы
δ	средняя изменчивость оптимальной иерархической структуры производственной подсистемы

Q	величина постоянного расхода воды
$b(i,j)_i^N$	сеточная функция высот
V_0	поступивших на территорию за время t
$\bar{V}$	объем вод, локализованных в руслах
α_{i_n}	коэффициент относительной экологической ценности
$S_{i_n}^{zat}$	площадь затопленной территории

Глава 1. Модели и алгоритмы оптимизации симметричных иерархических структур потоковых производственных систем

1.1 Модели симметричных иерархические структур в системах с потоками

1.1.1 Модели симметричных иерархических структур в организационных системах

Внимание к оптимальным иерархическим организационным структурам в связи с проблемой их оптимальности проявилось еще в древности. В диалоге Платона «Государство» в качестве оптимальной предлагается предлагается симметрично структурированная система из 5040 семей, позволяющая оптимально распределять обязанности между гражданами [59].

Во второй половине XX века большой интерес к исследованию иерархических структур был вызван, с одной стороны, усложнением организационных и технических систем, с другой — появлением масштабных задач обработки информации [95; 96; 105; 112; 118; 125]. Методы синтеза иерархических структур в технических системах распространялись на организационные и информационные системы, и, как оказалось, методы и результаты оптимизации иерархических структур в этих системах имеют много общего. Симметричность оптимальных иерархических структур во всех системах была вызвана однородностью распределения функций по их различным частям. Среди авторов работ этого периода следует отметить Bailly G., Oulasvirta A. и др [88; 110], Blake R.R. и Mouton J.S. [90], Champy J. [98], Grant R.M и др. [101], Kauffman S. [104], Mincberg G. [48], Sheu C.Y. и Prager W. [115], Tran Q. и Tian Y. [123], Troiano L., Birtolo C., Armenise R. [124], Watzlawick P. и др. [127], Weick K.E. и Quinn R.E. [128].

Из значимых результатов в области оптимизации иерархических структур отметим общий подход, развиваемый Д.А. Новиковым, М.В. Губко, А.А Во-

рониным, С.П. Мишиным [9–12; 22–29; 46; 49–53; 55; 56], послуживший исходным пунктом настоящего исследования, основу которого составляет принцип локальности функций, реализуемых элементами иерархии. Реализация этого принципа привела к введению так называемой «секционной» целевой функции. Конкретизация свойств этой функции определяет вид оптимальной иерархии, а одинаковость этих свойств во всех структурных элементах определяет свойство ее симметричности. Целевая функция задается, как правило, аналитически. В одних случаях задача оптимизации решается аналитически, в других –– предварительный аналитический анализ позволяет существенно сократить сложность численной оптимизации. Так, например, свойство однородности целевой функции обусловливает оптимальность иерархии в виде однородных деревьев (пример такого дерева приведен на рис. 1.1) и дало возможность получить аналитические оценки значений оптимальных целевых функций [27; 29].

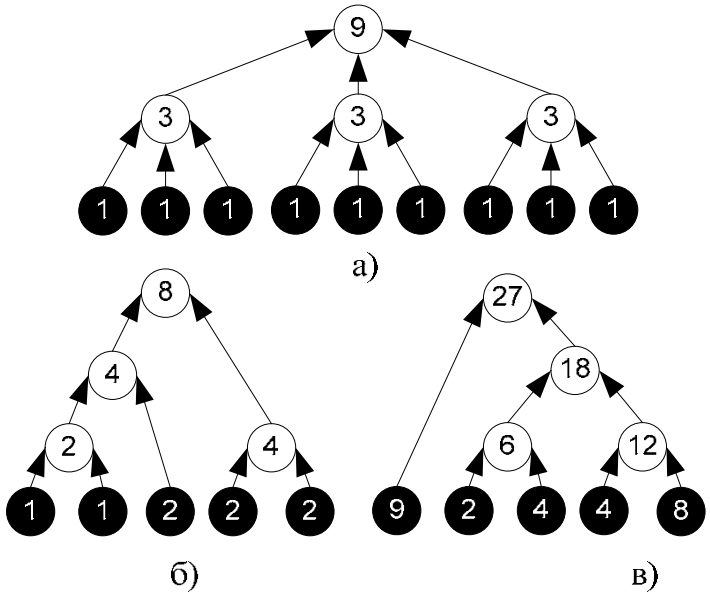

Рисунок 1.1 — Иерархии в виде однородных деревьев [27]

1.1.2 Модели симметричных иерархических структур в технических системах

Одним из наиболее важных задач построения и оптимизации структур в технических системах являются задачи построения эффективных структур сборочных линий [81; 86], сетей [89; 92; 117]. Несбалансированная структура сборочной линий приводит к увеличению времени производственного цикла, а также время простоя, что приводит к увеличению затрат и снижению эффективности производительности организации [86].

В [28] исследуется оптимальная структура сборочного производства.

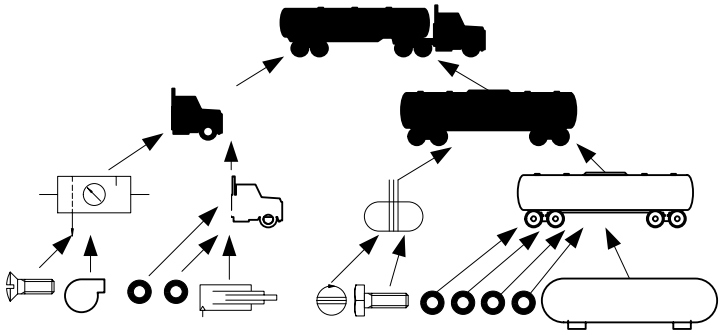

Рисунок 1.2 — Пример схемы сборочного производства [28]

Предполагается, что собираемое устройство состоит из n исходных деталей. Структура сборки моделируется ориентированным деревом с листьями — исходными деталями, корнем — результатом сборки, остальными вершинами — промежуточными фрагментами, дугами, описывающими порядок сборки (см. рис. 1.2). Каждой секции такого дерева соответствует отдельный этап сборки.

Затраты этой иерархии, складывающиеся из затрат на проведение каждого этапа, зависящего от соединяемых блоков, описываются секционной однородной функцией затрат и сводятся к задаче поиска оптимальной древовидной иерархии для секционной функции затрат. Для решения этой оптимизационной задачи можно использовать разработанные в [9–12] численные алгоритмы

поиска оптимального дерева, а также развитые в [25; 27–29] аналитические методы.

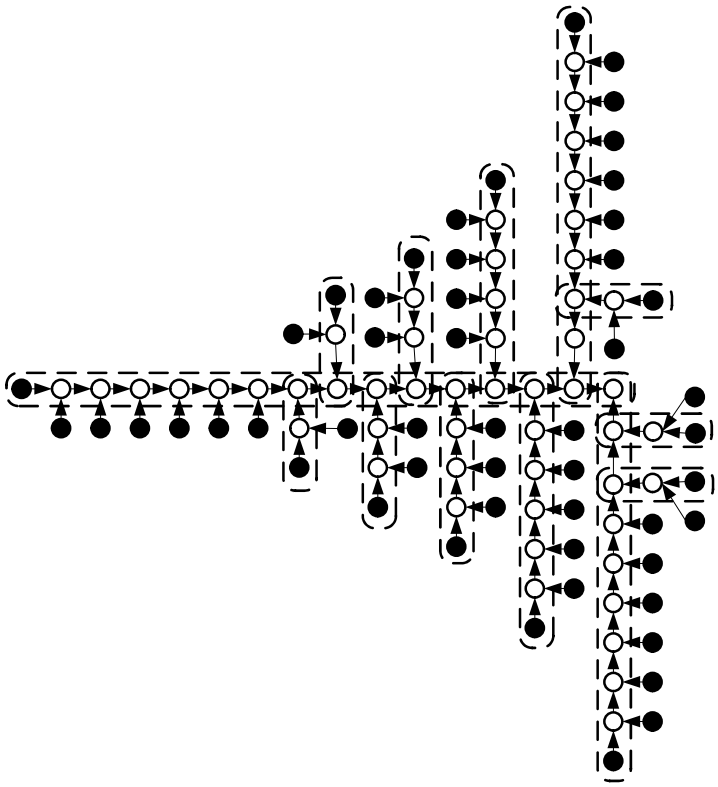

Рисунок 1.3 — Пример сложного конвейера [28]

На рис. 1.3 приведен пример построенной оптимальной структуры сложного конвейера, состоящего из основной конвейерной линии и нескольких соединяющихся с ней вспомогательных линий.

В [117] рассматривается иерархически организованный маршрутизатор, который упрощает арбитраж, избегая длинных проводов в арбитрах.

Для сотовых сетей является актуальной задача минимизации стоимости обновления местоположения, поскольку для процесса обновления местоположения требуется интенсивная передача сигналов. В [92] для решения данной задачи предлагается использование иерархической структуры сотовой сети, главная задача состоит в определении степени иерархии, минимизирующей стоимость обновления местоположения.

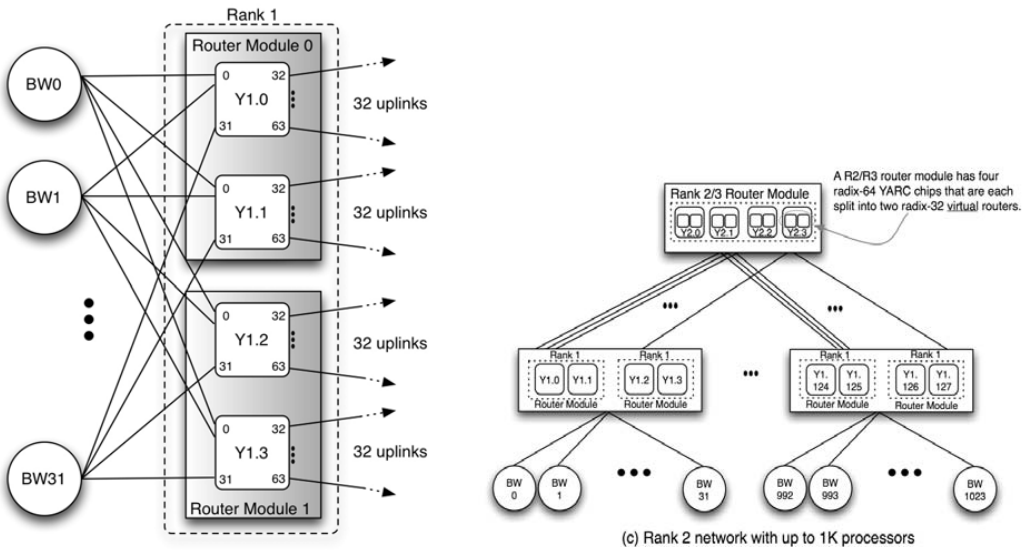

Рисунок 1.4 — Иерархические маршрутизаторы с одним и двумя чипами [117]

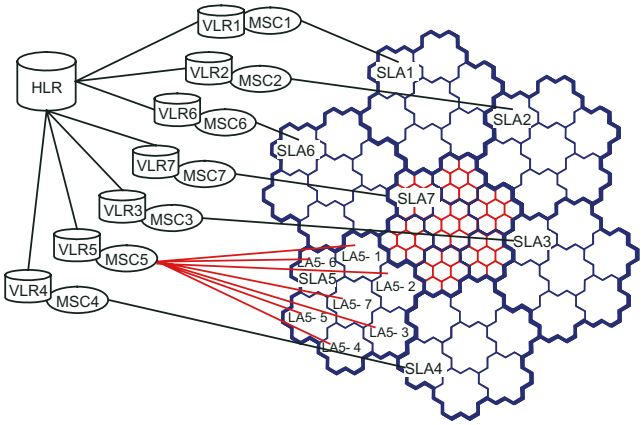

Рисунок 1.5 — Сотовая сеть с использованием иерархической структуры [92]

1.1.3 Модели симметричных иерархических структур в системах обработки информации

Многочисленные частные модели оптимизации иерархических структур связаны с проблемой эффективной обработки информации и, в частности, эффективных вычислений.

Моделями Р. Раднера, Т. Ван Зандта является распределенное вычисление некоторой ассоциативной функции в распределенной вычислительной сети,

задающей порядок и правила взаимодействия процессоров. В модели Раднера [112] целевой функцией считается общее время вычисления и число процессоров. Целью оптимизации является построение эффективной вычислительной сети (иерархии), минимизирующей время вычисления при заданном количестве суммируемых элементов и количестве процессоров. Задача решается методами дискретной оптимизации. В модели Ван Зандта [125] данные обрабатываются в систолическом режиме. Автором показано, что в этом случае эффективная иерархия состоит из набора оптимальных деревьев.

В модели П. Болтона и М. Деватрипонта [95; 96], усложняющей модели Р. Раднера и Т. Ван Зандта вычислительная система функционирует непрерывно, когорты данных доступны в любой момент, и задачей является обработка всех данных. Вычислительная сеть имеет вид направленного дерева. Средний доход системы пропорционален числу обработанных когорт. Оптимальная иерархия стремится к симметричному дереву (насколько позволяет дискретность задачи). Следует отметить, что развитый подход применим к анализу иерархий различной природы. Так, предложенные в [10] алгоритмы поиска оптимального дерева применимые при синтезе систем обработки информации.

К структурам обработки информации можно отнести построение и оптимизацию структур иерархических интерфейсов и меню [30; 88; 110; 124]. В [30] предложена математическая модель оптимизации структуры иерархических меню, в которой каждому элементу меню поставлена в соответствие его популярность и решается задача оптимизации структуры меню, минимизирующей среднее время поиска. Предложен алгоритм построения оптимального меню, учитывающий как семантические ограничения, так и результаты оптимизации. Работа алгоритма проиллюстрирована на примере оптимизации меню мобильного телефона. Цель работ [88; 110] — оптимизация структуры меню для интерактивной помощи разработчикам и дизайнерам программых продуктов. Для этого авторами разработано приложение-оптимизатор MenuOptimizer, который

помогает справляться с неопределенностью и распознавать хорошие решения. Это позволяет разработчикам передать все комбинаторные проблемы оптимизатору MenuOptimizer, который способен их быстро решить, при этом не нарушая сам процесс проектирования. Доказано, что с помощью MenuOptimizer, можно за считанные минуты получить оптимальную структуру меню для сложных систем. Задача поиска эффективного меню в [124] сводится к задаче генетического линейного программирования. Полученные решения сравниваются с традиционными подходами поиска оптимального меню, а экспериментальные результаты обсуждаются и сравниваются с решениями человека.

1.1.4 Модели симметричных иерархических структур в итерационных производственных процессах

К итерационным технологиям относятся повторяющиеся процессы, следствием которых является рост количества или качества преобразуемого объекта. К производствам с итерационными технологиями относятся дорожное хозяйство, профилактический ремонт оборудования [20], сепарирование [8], обогащение, очистка, сушка, итерационное научение навыкам, последовательное обучение, проектирование (в том числе разработка программного обеспечения [84; 108]). Эти технологии могут быть в составе основного или вспомогательного производства, призванного обеспечить адаптивность основного производства к нестабильным условиям функционирования и неразвитости инфраструктуры.

Примером сложноструктурированного процесса может служить процесс ремонта или восстановления деталей. Так в [20] описывается процесс восстановления гильзы цилиндра автомобильного двигателя ЗМЗ-53, процесс характе-

ризуется следующими параметрами: материал детали, твердость поверхности, допуски на диаметр цилиндра. Структура технологического процесса восстановления гильзы цилиндра представляется в виде ориентированного графа (см. рис. 1.7), вершинам которого ставятся в соответствие операции восстановления, вершины образуют горизонтальные ряды, каждый из которых характеризует этап восстановления, дуги графа — затраты.

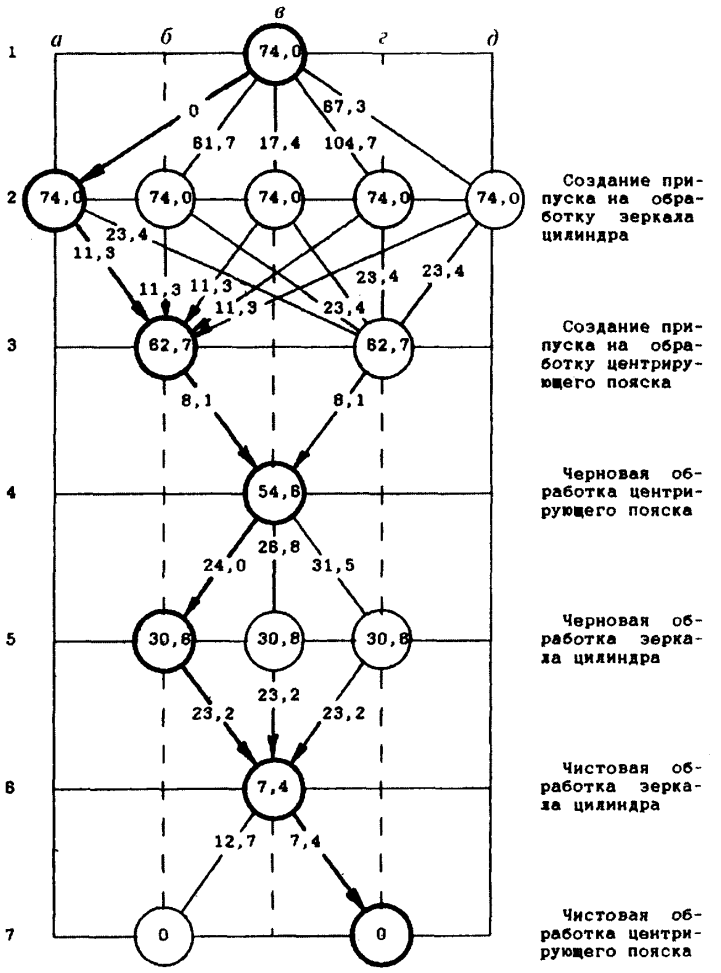

Рисунок 1.6 — Граф вариантов технологического процесса восстановления гильзы цилиндра [20]

В [20] так же описывается задача структурного синтеза взаимозаменяемых элементов, выполняющих часть технологической операции, состоящая в выборе структуры данных элементов, полностью выполняющих технологическую функцию, но с минимальными затратами на свое создание и эксплуатацию. Данная структура представляется в виде ориентированного графа, где направление дуг задается направлением передачи энергии. Вершины графа p_{ij} соответствуют

некоторому множеству признаков, вершины образуют горизонтальные ряды, каждый из которых представляет множество i исполнений механизма j-типа. Дуги графа l_{ij} соответствуют затратам на создание и эксплуатацию последующего механизма.

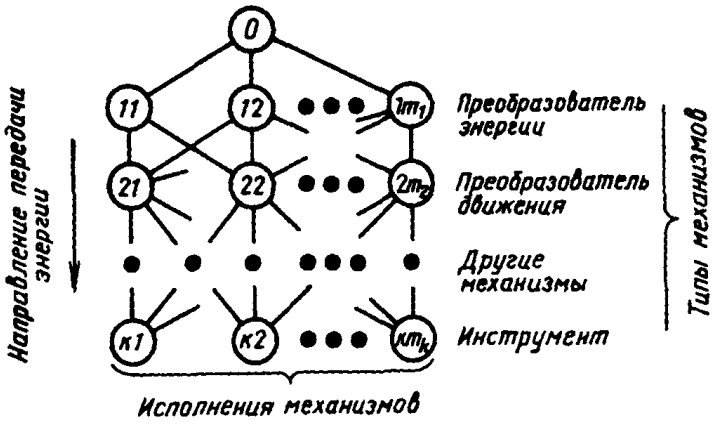

Рисунок 1.7 — Граф структур исполнительного агрегата ($1, 2, \ldots, k$ — типы механизмов, m_k — количество видов механизмов k-го типа [20]

Примером итерационного процесса может служить процесс переноса свойств обрабатываемого объекта от предшествующих операций и переходов к последующим (наследственность в технологии машиностроения), которое в дальнейшем сказывается на эксплуатационных свойствах деталей и показателей качества при восстановлении, обработке, сборке и эксплуатации деталей машин [64]. Данный технологический процесс представляется в виде ориентированного n-дольного графа (рис. 1.8), выделяющего заготовительные, черновые, чистовые, отделочные операции, а также операции обкатки и износа на стадиях эксплуатации.

Начальная вершина графа в технологическом процессе представляет собой заготовку (З), а конечная вершина в процессе эксплуатации — изношенную деталь (Д). Ориентированные ребра графа показывают передачу показателей свойств детали при обработке, сборке и эксплуатации машин. Ребра, изображенные сплошной линией, показывают прямую передачу свойств детали, штриховые линии — взаимодействие свойств обрабатываемого объекта от предше-

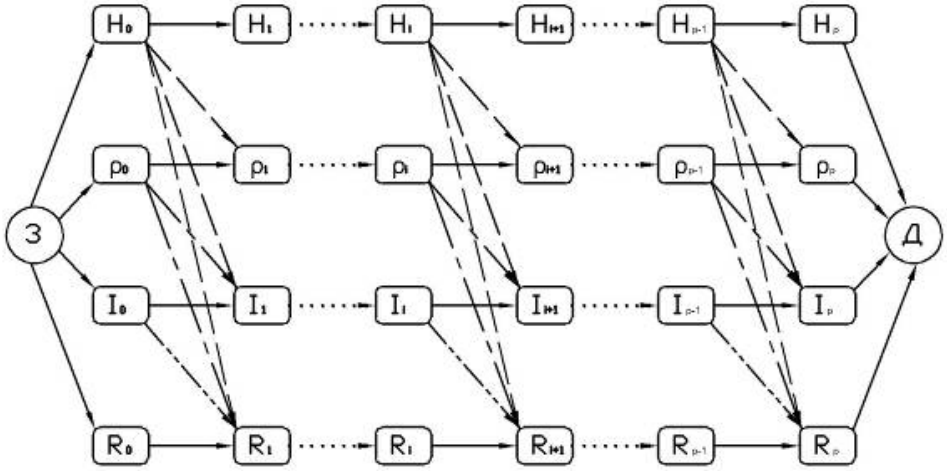

Рисунок 1.8 — Граф технологического и эксплуатационного наследования, отражающий взаимовлияние физико-механических и геометрических показателей качества [64]

ствующих операций и переходов к последующим.

Примером процесса может являться процесс синтезирования одного из возможных вариантов схемы разделения порошковой смеси пластмасс (поливинилхлорид (ПВХ) массой 200 кг. и удельным весом 1.313 γ, полистирол (ПС) массой 100 кг. и удельным весом 1.055 γ, полиэтилен высокой плотности (ПЭВП) массой 250 кг. и удельным весом 0.958 γ, полиэтилен низкой плотности (ПЭНП) массой 350 кг. и удельным весом 0.916 γ, полипропилен (ПП) массой 100 кг. и удельным весом 0.901 γ), два варианта схемы разделения представлены на рис. 1.9.

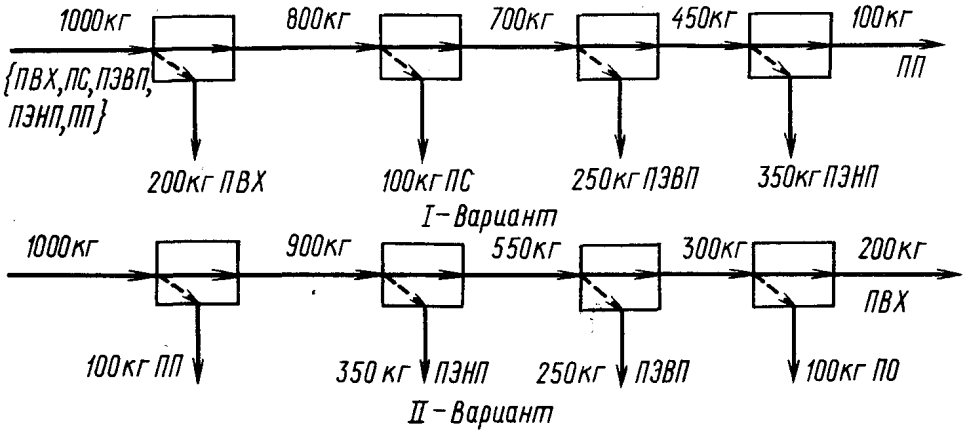

Рисунок 1.9 — Два варианта операторных схем разделения порошковой смеси пяти пластмасс: ПВХ, ПС, ПЭВП, ПЭНП и ПП [40]

Схема разделения представлена в виде ориентированного графа, вершины

которого представляют собой процесс отделения одной из пластмасс от порошковой смеси. Для разделения смеси используется процесс осаждения порожка в жидкости с разным удельным весом. Ребрам (дугам) иерархического графа схемы разделения соответствуют потоки отделенных пластмасс от порошковой смеси.

Другим примером является сложноструктурированный процесс очистки зерна в сито-воздушном сепараторе «ЛУЧ ЗСО» [8]. Структура процесса очистки зерна в сепараторе представлена на рис. 1.10.

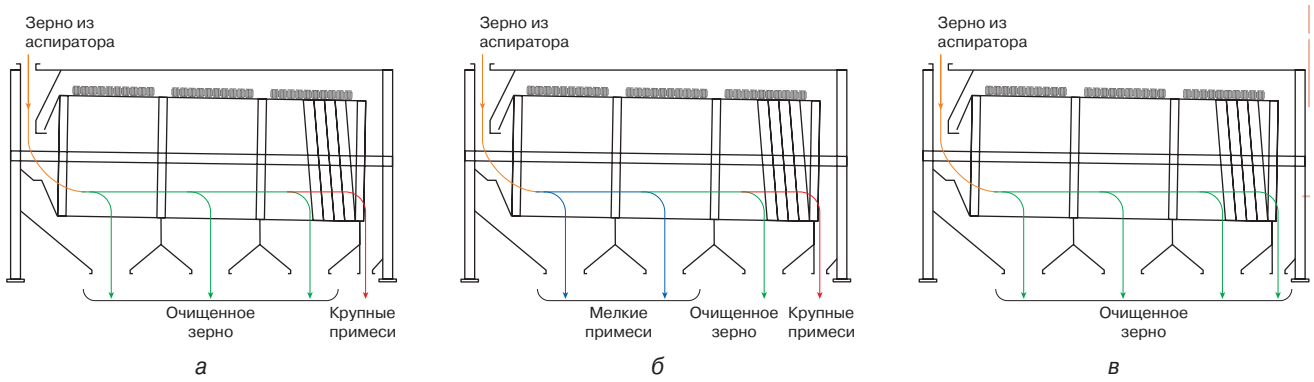

Рисунок 1.10 — Структура процессов очистки зерна в ситовом сепараторе: а – предварительная; б – первичная; в – вторичная (калибровка, сортировка) [8]

1.1.5 Модели симметричных иерархических структур учебного процесса в вузе.

В работах Королькова С.А., Лосева А.Г., Решетниковой И.М. [42; 43; 80] (Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2013618134) процесс обучения в вузе можно описывается семейством подграфов n-дольного иерархического графа, отражающим последовательно-параллельную структуру взаимосвязей дидактических единиц всей совокупности дисциплин учебного плана и факторную структуру производственного процесса. Факторами данного

производственного процесса выступают обучаемые (студенты) — объект производства, преподаватели различной квалификации и компетенции –– субъекты производства, и техническое оборудование (аудиторный фонд, компьютерный и приборный парк). Задачами оптимизации, представленными в этих работах, является поиск допустимых и оптимальных структур при различных сочетаниях факторов производства и анализ их устойчивости в заданном диапазоне факторных изменений.

1.2 Формализация структурно-функциональных моделей иерархических структур производственных подсистем предприятий

1.2.1 Структурно зависимые производственные функции леонтьевского типа

В макроэкономической производственной функции (ПФ) адаптационные свойства предприятий учитываются неявно через свойство эластичности ПФ по факторам производства, которое можно объяснить как неявным учетом многообразия эффективных неадаптивных технологий, так и адаптивными свойствами последних. В микроэкономическом моделировании, где высокоспециализированный вид ПФ позволяет вычленять роль отдельных элементов технологической и управленческой структуры, традиционно предполагается неизменность структурно-функциональной модели предприятий, что также не позволяет напрямую анализировать адаптационные их свойства. Использование структурнозависимых производственных функций в задачах структурной оптимизации позволяет исследовать обусловленность адаптационных процессов предприятий от параметров их внутренней и внешней среды. Возможность численного поиска структуры производственной подсистемы предприятия, максимизирующей значение ПФ, обусловлена возможностью рекурсивного построения ее структу-

ры и, как следствие, представление ПФ в виде суперпозиции элементарных ПФ. Использование в качестве последних элементарных ПФ Леонтьева позволяет свести задачу структурной оптимизации к решению семейства задач линейного программирования с изменяющимся числом переменных и уравнений.

В [41] описываются наиболее распространенные ПФ, говорится об их экономический применимости для различных типов ОС, показываются взаимосвязи между ними. Одной из основных ПФ, по мнению этих авторов, являются функция с фиксированными пропорциями факторов (функция Леонтьева)

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right),$$

функция представляет решение следующей задачи линейного программирования:

$$y \to \max,\ a_i y - x_i \le 0,\ i = \overline{1, n}.$$

А так же рассматриваются ПФ, полученные из суперпозиции ПФ Леонтьева и других ПФ, например, ограниченная функция CES имеет вид

$$y = \min\left((a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{a_4}, \frac{x_1}{a_5}, \frac{x_2}{a_6}\right),$$

данную функцию можно рассматривать как решение оптимизационной задачи:

$$y \to \max,\ a_5 y - x_1 \le 0,\ a_6 y - x_2 \le 0,\ y - (a_1 x_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{a_4} \le 0.$$

Обобщим данный вид ПФ. Производственную функцию вида

$$y = \min\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \ldots, \frac{x_k}{a_k}, \varphi_1(X_{k+1}), \ldots, \varphi_l(X_{k+l}), \right), \tag{1.1}$$

где $\varphi_i(X_{k+i})$ — неотрицательные функции n_i переменных, а $X_{k+i} = (x_{k+s_{i-1}}, \ldots, x_{k+s_i})$, где $s_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, назовем квазилинейной производственной функцией Леонтьева.

Производственная функция (1.1) представляет решение следующей задачи

математического программирования:

$$y \to \max,\ y - x_i \le 0,\ i = \overline{1,k},\ y - \varphi_i(X_{k+i}) \le 0,\ i = \overline{1,l}.$$

В разделах 1.2.5–1.2.4 представлены некоторые модели структурно зависимых ПФ в виде суперпозиции элементарных ПФ Леонтьева и квазилинейных ПФ Леонтьева.

В настоящей диссертационной работе структурно зависимые ПФ являются решением задачи математического программирования на множестве регулярных иерархических графов (ориентированных графов без циклов). Структурно зависимые ПФ представляются в виде ориентированных графов без циклов. Для формальной постановки задачи конкретизируем некоторые множества иерархических графов.

1.2.2 Модель сложного преобразователя

Определение 1. *Сложным преобразователем (СП) будем называть семейство графов* $G_{S_1}(V(n,m), E(n,m))$ *с параметрами* n *и* m*, где*

$V(n,m) = \{N \cup \{R^i N\}_{i=1}^m \cup \{N_i\}_{i=1}^n \cup F\}$,

$E(n,m) = \{[N \cup \{R^i N\}_{i=1}^m, \{N_i\}_{i=1}^n \cup F], [\{N_i\}_{i=1}^{n-1}, \{N_j\}_{j=i+1}^n \cup F]\}$,

$E(*)(n,m) = \{[N \cup \{R^i N\}_{i=1}^m, \{N_i\}_{i=1}^n \cup F]\}$,

где $[A,B]$ *— множество дуг, таких что для каждой вершины* $a \in A$ *существуют дуга* $(a, b_i) \in E$, $i = \overline{1,|B|}$, $A \subset V$ *и* $B \subset V$ *— непустые множества вершин графа* $G(V,E)$*, такие что* $A \cap B = \emptyset$.

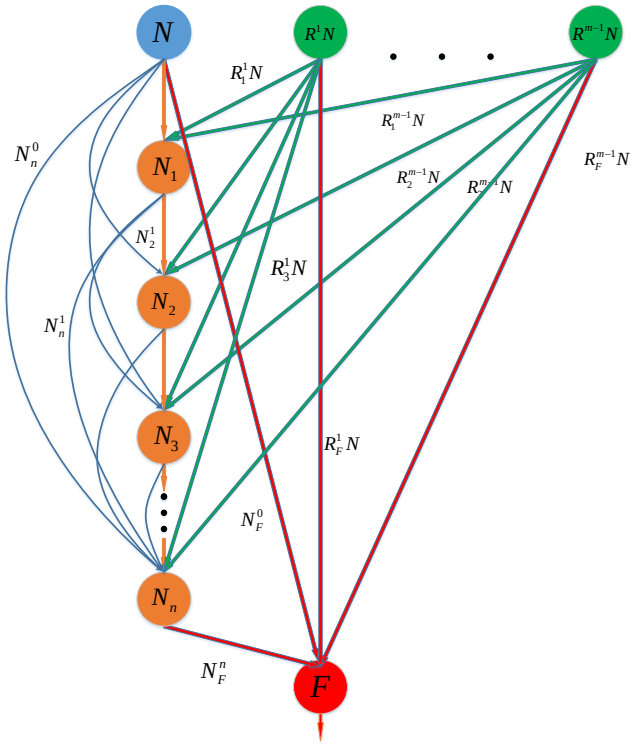

Рисунок 1.11 — Структура сложного преобразователя

1.2.3 Модель комплексного преобразователя

Определение 2. *Комплексным преобразователем (КП) будем называть семейство графов* $G_{S_2}(V(n,m),E(n,m))$ *с параметрами* n *и* m*, где*

$$V(n,m)=\{N\cup\{R^iN\}_{i=1}^{m}\cup\{R^i\}_{i=1}^{m-1}\cup\{\{R^iR^j\}_{j=1}^{m-1}\}_{i=1}^{m-1}\cup[\{F_{R^j}\}_{j=1}^{m-1}\cup F\},$$

$$E(n,m)=\{[N\cup\{R^iN\}_{i=1}^{m},\{N_i\}_{i=1}^{n}\cup F_N],[\{N_i\}_{i=1}^{n},\{N_j\}_{j=i+1}^{n}\cup F_N],[\{R^i\}_{i=1}^{m-1}\cup$$
$$\cup\{\{R^jR^i\}_{j=1}^{m-1}\}_{i=1}^{m-1},\{\{R_j^i\}_{j=1}^{n}\}_{i=1}^{m-1}\cup\{F_{R^i}\}_{i=1}^{m-1}],[\{\{R_i^j\}_{i=1}^{n-1}\}_{j=1}^{m-1},\{\{R_l^j\}_{l=i+1}^{n}\}_{j=1}^{m-1}\cup$$
$$\cup\{F_{R^j}\}_{j=1}^{m-1}],[\{F_{R^j}\}_{j=1}^{m-1},F]\}.$$

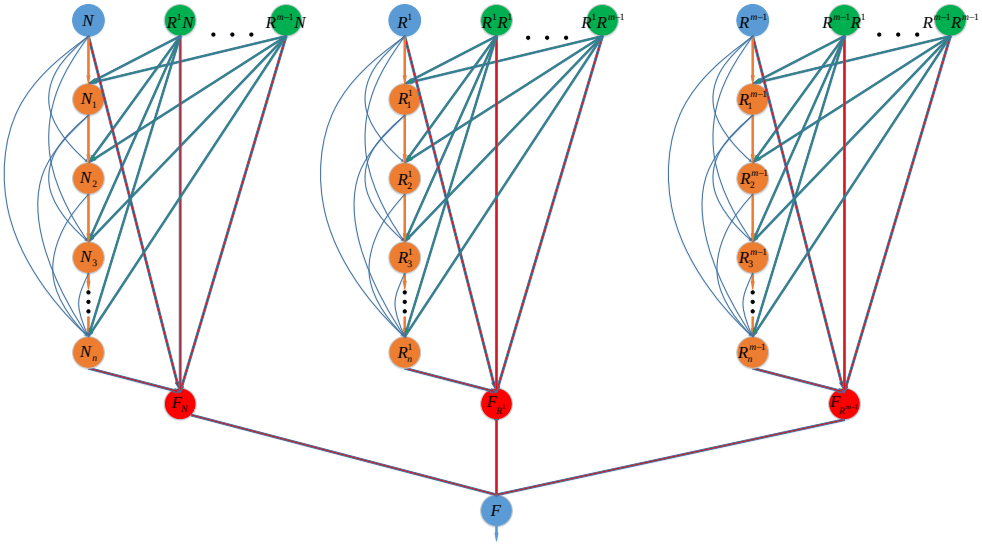

Рисунок 1.12 — Структура комплексного преобразователя

1.2.4 Модель специализированного преобразователя

Определение 3. *Специализированным преобразователем (СпП) будем называть семейство графов* $G_{S_3}(V(n,m),E(n,m))$ *с параметрами* n *и* m*, где*

$$V(n,m)=\{N\cup\{D_i\}_{i=1}^{n}\cup\{\{R_j^i\}_{i=1}^{n}\}_{j=1}^{m}\cup N_b\},$$

$$E(n,m)=\{[N\cup\{\{R_j^i\}_{i=1}^{n}\}_{j=1}^{m},\{D_i\}_{i=1}^{n}],[\{D_i\}_{i=1}^{n-1},\{D_j\}_{j=i+1}^{n}\cup N_b]\}.$$

Таким образом, проведенный в п. 1.1.1–1.1.4 анализ структур производственных и технических систем позволяет заключить, что описанные технологические процессы описываются порожденными подграфами полного n-дольного иерархического графа, изображенного на рис. 1.14.

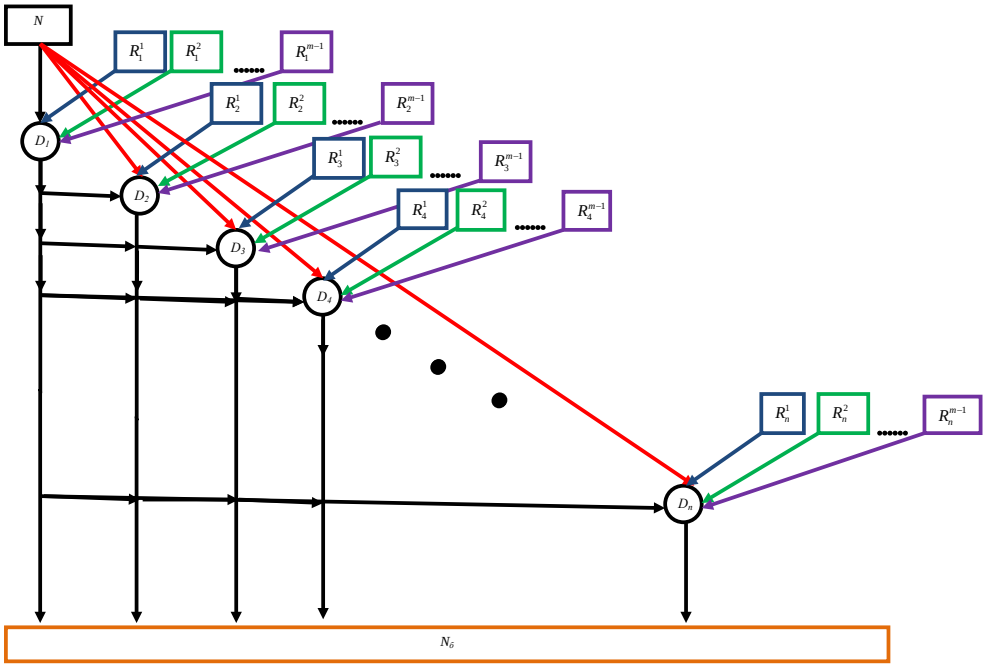

Рисунок 1.13 — Структура специализированного преобразователя (СпП)

1.2.5 Модель универсального преобразователя

Определение 4. *Универсальным преобразователем (УП) будем называть семейство полных n-дольных иерархических графов $G_{S_0}(V(n,m),E(n,m))$ с параметрами n и m, где*

$$V(n,m) = \{R \cup \{D_i\}_{i=1}^{n} \cup F\},$$

$$E(n,m) = \{[R, \{D_i\}_{i=1}^{n} \cup F], [\{D_i\}_{i=1}^{n}, \{D_j\}_{j=i+1}^{n} \cup F]\}.$$

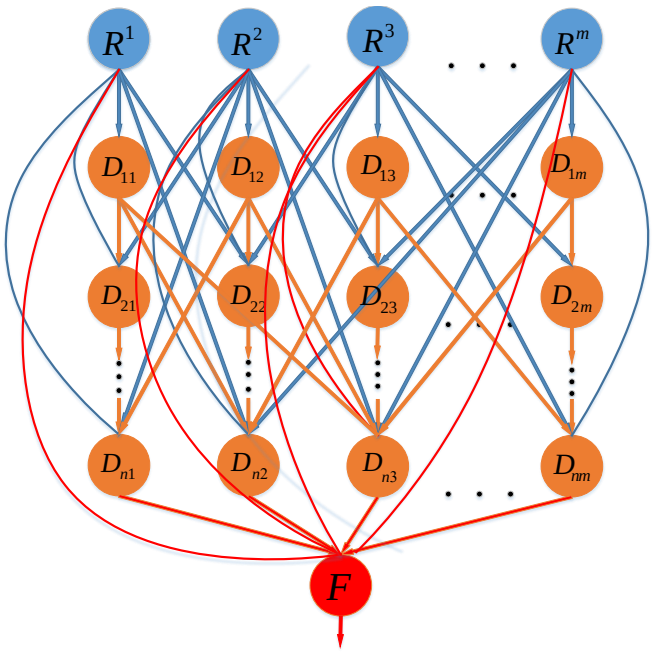

Рисунок 1.14 — Структура универсального преобразователя (полный n-дольный ориентированный граф)

1.3 Алгоритм оптимизации иерархических структур производственных подсистем предприятий

1.3.1 Формализация и постановка задач оптимизации

В качестве элементарной ПФ каждого элемента производственной подсистемы предприятия с неизменной технологией (простого преобразователя — ПП) используется ПФ Леонтьева [41]:

$$F = k \min\left(\frac{R_1}{a_1}, \frac{R_2}{a_2}, \ldots, \frac{R_m}{a_m}\right), \tag{1.2}$$

где R_i — величины аргументов — трансформационных факторов производства, a_i — технологические коэффициенты, k — нормирующий множитель, выбираемый так, чтобы максимальное значение ПФ равнялось сумме величин ее аргументов (например, $k = \sum_{i=1}^{m} a_i$). Использование m-факторной модели позволяет учитывать векторную природу макроэкономических факторов производства.

Задача оптимизации (1.2) имеет вид задачи ЛП [41]:

$$F \to \max_{\{R_i\}_{i=1}^m}, -\frac{kR_1}{a_i} + F \le 0, i = \overline{1,m},$$

и очевидное решение $R_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} R^i a_i}{k}$, $F = \sum\limits_{i=1}^{m} R^i$. То есть ПФ оптимального ПП в нашем случае равна сумме ее аргументов. На рис. 1.15 приведена структурная схема ПП, на рис. 1.16 — графики ПФ ПП (при $m = 3$).

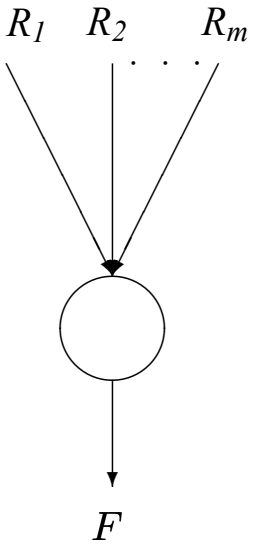

Рисунок 1.15 — Простой преобразователь

Зададим на структурах, описанных в п. 1.2.2-1.2.5, ПФ Леонтьева в вершинах.

Модель универсального преобразователя

- В условиях определенности. Целевая функция (ПФ) F для УП (см. рис. 1.17) задается следующими соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}^{0,k} + R_F^{0,k} = R^k,\ k = \overline{1,m}; \tag{1.3}$$

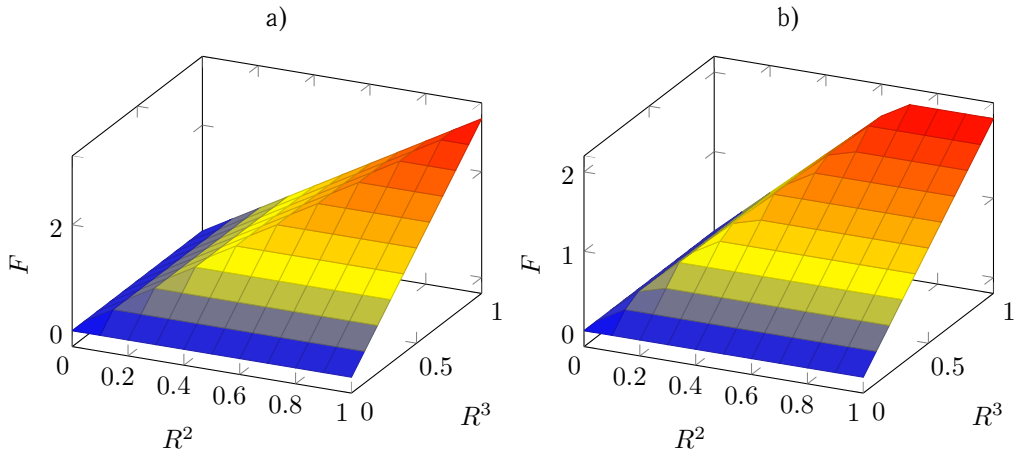

Рисунок 1.16 — График $F(1, R^2, R^3)$ a) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$; b) $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3$

$$\sum_{l=i+1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{l,j}^{i,k} + R_F^{i,k} = S_{i,p} \min\left(\frac{1}{a_{i,p}^1}\sum_{d=0}^{i-1} R_{i,p}^{d,1}, \frac{1}{a_{i,p}^2}\sum_{d=0}^{i-1} R_{i,p}^{d,2}, \ldots, \frac{1}{a_{i,p}^m}\sum_{d=0}^{i-1} R_{i,p}^{d,m}\right),$$

$$k = \overline{1,m},\ p = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}; \quad (1.4)$$

$$R_F^{n,d} = S_{n,d} \min\left(\frac{1}{a_{n,d}^1}\sum_{k=0}^{n-1} R_{n,d}^{k,1}, \frac{1}{a_{n,d}^2}\sum_{k=0}^{n-1} R_{n,d}^{k,2}, \ldots, \frac{1}{a_{n,d}^m}\sum_{k=0}^{n-1} R_{n,d}^{k,m}\right),$$

$$d = \overline{1,m}; \quad (1.5)$$

$$F = S \min\left(\frac{1}{A^1}\sum_{k=0}^{n} R_F^{k,1}, \frac{1}{A^2}\sum_{k=0}^{n} R_F^{k,2}, \ldots, \frac{1}{A^m}\sum_{k=0}^{n} R_F^{k,m}\right). \quad (1.6)$$

Здесь уравнения (1.3) описывают распределение исходных факторов производства по структуре УП, уравнения (1.4) дают балансовые соотношения для i-го вспомогательного ПП (вершины D_{ik}, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$), где $R^{i,k} = \sum_{l=i+1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{l,j}^{i,k} + R_F^{i,k}$ — общая величина фактора R^k, произведенного на i-м ПП, $R_{l,j}^{i,k}$ — величина фактора R^k, произведенного на i-м ПП и используемого на l-м ПП для фактора R^j. Уравнения (1.5) отвечают последнему вспомогательному ПП ($i = n$).

Из переменных системы (1.3)-(1.6) составим вектор факторных потоков $\varphi(n, m)$ размерности $p(n, m)$:

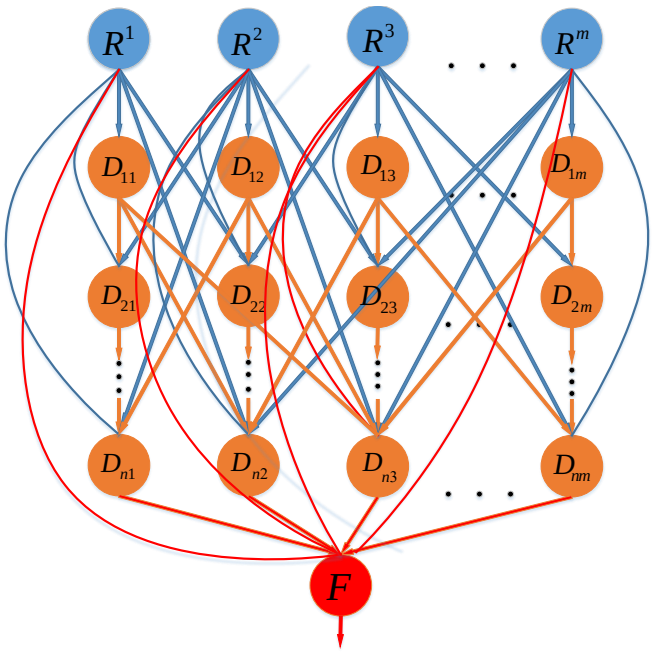

Рисунок 1.17 — Структура универсального преобразователя (структура S_0)

$$\varphi(n,m) = \left(\{\{\{\{R^{i,l}_{j,k}\}^m_{k=1}\}^n_{j=i+1}\}^m_{l=1}\}^n_{i=0}, \{\{R^{i,l}_F\}^m_{l=1}\}^n_{i=0}, \varphi_F \right), \tag{1.7}$$

где

$$p(n,m) = \frac{m(n+1)(mn+2)}{2}.$$

Утверждение 1. *ПФ, соответствующая оптимальной структуре, заданной на множестве структур, описываемых системой (1.3)-(1.6), является решением следующей задачи параметрического линейного программирования:*

$$F = (\hat{\rho}, \varphi) = \varphi_F \to \max_{\varphi(n,m),n},$$

$$\sum_{j=1}^{p(n,m)} M(n,m)_{ij}\varphi(n,m)_j \le \beta_i,\ i = \overline{1, u(n,m)},$$

$$\beta = \left(R^1, R^2, \ldots, R^m, 0, \ldots, 0\right)^T,$$

$$p(n,m) = \frac{m(n+1)(mn+2)}{2}, u(n,m) = m(mn+2). \tag{1.8}$$

$n^* = \min\left(\arg\max_n \varphi_F(n)\right)$, *где* $\varphi_F(n)$ — *решение задачи (1.8)*

- В условиях неопределенности. Значение целевой функции F_ε для УП в

условиях неопределенности является решением системы (1.9)-(1.11), где $R^{0,j}_{i,k},\ R^{0,j}_{F}$ $(i=\overline{1,n},\ j,k=\overline{1,m})$ — компоненты вектора $\varphi^*(n,m)$ (решение задачи (1.8)).

$$\sum_{l=i+1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\hat{R}^{i,k}_{l,j}+R^{i,k}_{F}=S_{i,p}\min\left(\frac{R^{0,1}_{i,p}+\sum\limits_{d=1}^{i-1}\hat{R^{d,1}_{i,p}}}{a^1_{i,p}(1\pm\varepsilon_i)},\ldots,\frac{R^{0,1}_{i,p}+\sum\limits_{d=1}^{i-1}\hat{R}^{d,m}_{i,p}}{a^m_{i,p}(1\pm\varepsilon_i)}\right),$$

$$k=\overline{1,m},\ p=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n};\quad(1.9)$$

$$R^{n,d}_{F}=S_{n,d}\min\left(\frac{R^{0,1}_{n,d}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\hat{R}^{k,1}_{n,d}}{a^1_{n,d}(1\pm\varepsilon_n)},\ldots,\frac{R^{0,m}_{n,d}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\hat{R}^{k,m}_{n,d}}{a^m_{n,d}(1\pm\varepsilon_n)}\right),$$

$$d=\overline{1,m};\quad(1.10)$$

$$F_\varepsilon=S\min\left(\frac{R^{0,1}_{F}+\sum\limits_{k=1}^{n}\hat{R}^{k,1}_{F}}{A^1(1\pm\varepsilon_F)},\ldots,\frac{R^{0,m}_{F}+\sum\limits_{k=0}^{n}R^{k,m}_{F}}{A^m(1\pm\varepsilon_F)}\right).\qquad(1.11)$$

Модель сложного преобразователя

- В условиях определенности. Целевая функция (ПФ) F для СП (см. рис. 1.18) задается следующими соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{n}N^0_i+N^0_F=N;\sum_{i=1}^{n}R^j_iN+R^j_FN=R^jN,\ j=\overline{1,m-1};\qquad(1.12)$$

$$\sum_{j=i+1}^{n}\left(N_j^i+e_iN_F^i\right)=S_i\min\left(\frac{1}{a_i^0}\sum_{l=0}^{i-1}N_i^l,\frac{1}{a_i^1}R_i^1N,\frac{1}{a_i^2}R_i^2N,\ldots,\frac{1}{a_i^{m-1}}R_i^{m-1}N\right),$$

$$i=\overline{1,n-1} \quad (1.13)$$

$$N_F^n=S_n\min\left(\frac{1}{a_n^0}\sum_{l=0}^{n-1}N_n^l,\frac{1}{a_n^1}R_n^1N,\frac{1}{a_i^2}R_n^2N,\ldots,\frac{1}{a_n^{m-1}}R_i^{m-1}N\right) \quad (1.14)$$

$$F=S_A\min\left(\frac{1}{A^0}\sum_{i=0}^{n}N_F^i,\frac{1}{A^1}R_F^1N,\frac{1}{A^2}R_F^2N,\ldots,\frac{1}{A^{m-1}}R_F^{m-1}N\right) \quad (1.15)$$

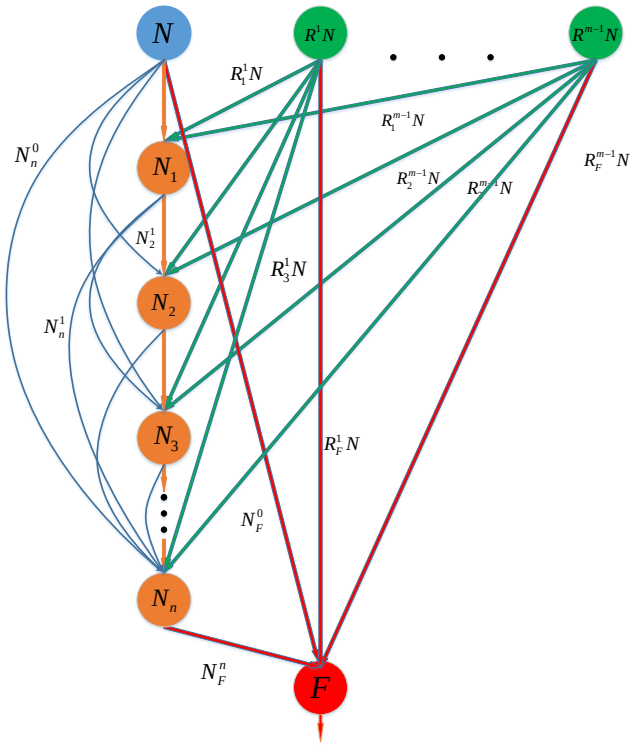

Рисунок 1.18 — Структура сложного преобразователя (структура S_1)

Здесь уравнения уравнения (1.12) описывают распределение исходных факторов производства по структуре СП, уравнение (1.13) дает балансовые соотношения для i-го вспомогательного ПП; $N^i=\sum\limits_{j=i+1}^{n}\left(N_j^i+N_F^i\right)$ — общая величина фактора, произведенного на i-м ПП; N_k^i — величина фактора N, произведенного на i-м и используемого на k-м ПП, $i=\overline{1,n-1}$. Уравнение (1.14) системы отвечает последнему вспомогательному ПП ($i=n$).

Из переменных системы (1.12)-(1.15) составим вектор факторных потоков

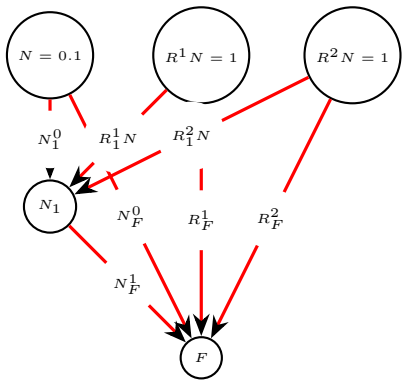

Рисунок 1.19 — Структура сложного преобразователя с производством части фактора N при $m = 3$, $n = 1$

$\varphi(n, m)$ размерности $p(n, m)$:

$$\varphi(n,m) = \left(\{\{N_i^j\}_{i=j+1}^{n}\}_{j=0}^{n-1}, \{\{R_i^l N\}_{i=1}^{n}\}_{l=1}^{m-1}, \{N_F^i\}_{i=0}^{n}, \{R_F^l N\}_{l=1}^{m}, \varphi_F \right), \tag{1.16}$$

где

$$p(n,m) = \frac{(n+1)n}{2} + (m-1)(n+1) + n + 2 = \frac{(n+1)(n+2m)+2}{2},$$

где $p(n, m)$ — размерность вектора $\varphi(n, m)$, а n и m — параметры, характеризующие число этапов вспомогательного производства и разнообразие факторов производства соответственно.

Проиллюстрируем функционирование СП на следующем примере.

Пример 1. Пусть $m = 3$, $N = 0.1$, $R^1N = 1$, $R^2N = 1$:

– При $n = 1$, $a_1^i = A^i = 1$, $i = 0, 1, 2$ (см. рис.1.19):

$$N_F^1 = 3\min\left(N_1^0, R_1^1N, R_1^2N\right) = 3\min\left(0.1, 0.1, 0.1\right) = 0.3,$$

$$F_N = 3\min\left(N_F^1 + N_F^0, R_F^1N, R_F^2N\right) = 3\min\left(0.3, 0.3, 0.3\right) = 0.9;$$

$$\varphi^*(1,3) = \left(N_1^0, R_1^1N, R_1^2N, N_F^0, N_F^1, R_F^1N, R_F^2N, F\right) =$$

$$= \left(0.10,\ 0.10,\ 0.10,\ 0.00,\ 0.30,\ 0.30,\ 0.30,\ 0.90\right).$$

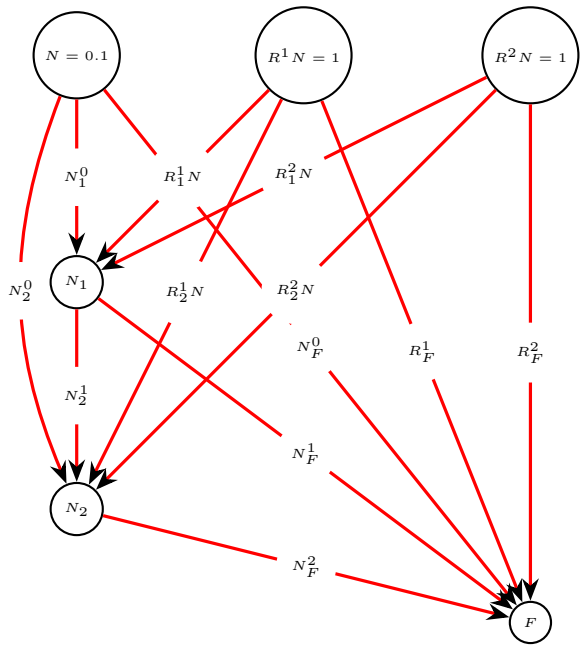

Рисунок 1.20 — Структура сложного преобразователя с производством части фактора N при $m = 3$, $n = 2$

– При $n = 2$, $a_1^i = a_2^i = A^i = 1$, $i = 0, 1, 2$ (см. рис. 1.20):

$$N_2^1 + N_F^1 = 3\min\left(N_1^0, R_1^1N, R_1^2N\right) =$$

$$= 3\min\left(0.066, 0.066, 0.066\right) = 0.2,$$

$$N_F^2 = 3\min\left(N_2^1 + N_2^0, R_2^1N, R_2^2N\right) =$$

$$= 3\min\left(0.2 + 0.033, 0.233, 0.233\right) = 0.7,$$

$$F_N = 3\min\left(N_F^2 + N_F^1 + N_F^0, R_F^1N, R_F^2N\right) =$$

$$= 3\min\left(0.7 + 0 + 0, 0.7, 0.7\right) = 2.1;$$

$$\varphi^*(2,3) = (N_1^0, N_2^0, N_2^1, R_1^1N, R_2^1N, R_1^2N, R_2^2N,$$

$$N_F^0, N_F^1, N_F^2, R_F^1N, R_F^2N, F) =$$

$$= (0.10,\ 0.00,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.20,$$

$$0.00,\ 0.10,\ 0.60,\ 0.70,\ 0.70,\ 2.10).$$

– При $n = 3$, $a_1^i = a_2^i = a_3^i = A^i = 1$, $i = 0, 1, 2$ (см. Рис. 1.21):

$$N_2^1 + N_3^1 + N_F^1 = 3\min\left(N_1^0, R_1^1 N, R_1^2 N\right) =$$
$$= 3\min\left(0.1, 0.1, 0.1\right) = 0.3,$$

$$N_3^2 + N_F^2 = 3\min\left(N_2^1 + N_2^0, R_2^1 N, R_2^2 N\right) =$$
$$= 3\min\left(0.2 + 0.+, 0.2, 0.2\right) = 0.6,$$

$$N_F^3 = 3\min\left(N_3^0 + N_3^1 + N_3^2, R_3^1 N, R_3^2 N\right) =$$
$$= 3\min\left(0. + 0.0, 0., 0.\right) = 0.0,$$

$$F_N = 3\min\left(N_F^3 + N_F^2 + + N_F^1 + N_F^0, R_F^1 N, R_F^2 N\right) =$$
$$= 3\min\left(0.0 + 0.6 + 0.1, 0.7, 0.7\right) = 2.1;$$

$$\varphi^*(2,3) = (N_1^0, N_2^0, N_3^0, N_2^1, N_3^1, N_3^2, R_1^1 N, R_2^1 N, R_3^1 N, R_1^2 N, R_2^2 N, R_3^2 N,$$
$$N_F^0, N_F^1, N_F^2, N_F^3, R_F^1 N, R_F^2 N, F) =$$
$$= (0.10,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.20,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.00,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.00,$$
$$0.00,\ 0.10,\ 0.60,\ 0.00,\ 0.70,\ 0.70,\ 2.10).$$

Следствие 1. *ПФ, соответствующая оптимальной структуре, заданной на множестве структур, описываемых системой (1.12)-(1.15), является решением следующей задачи параметрического линейного про-*

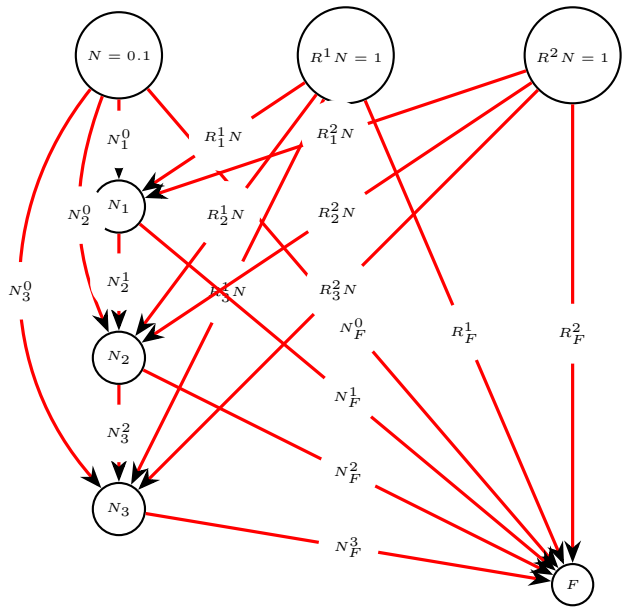

Рисунок 1.21 — Структура сложного преобразователя с производством части фактора N при $m = 3$, $n = 3$

граммирования:

$$F = (\rho, \varphi) = \varphi_F \to \max_{\varphi(n,m),n},$$

$$\sum_{j=1}^{p(n,m)} M(n,m)_{ij}\varphi(n,m)_j \le \beta_i,\ i = \overline{1, u(n,m)},$$

$$\beta = \left(R^1, R^2, \ldots, R^m, 0, \ldots, 0\right)^T,$$

$$p(n,m) = \frac{(n+1)(n+2m)+2}{2}, u(n,m) = m(n+2). \quad (1.17)$$

$n^* = \min\left(\arg\max_n \varphi_F(n)\right)$, *где* $\varphi_F(n)$ — *решение задачи (1.17)*

Утверждение 2. *Оптимальная структура СП с квазилинейной ПФ Леонтьева является решением задачи параметрического математического программирования, решение которой совпадает с решением оптимизационной задачи (1.17).*

Доказательство. Целевая функция F для СП с квазилинейной ПФ Леонтьева (1.1) задается следующими соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0 = N; \sum_{k=1}^{n} \varphi_j(R_k^j N) = R^j N,\ j = \overline{1, m-1},$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} N_j^i + N_F^i = \sigma_i \min\left(\frac{1}{a_i^0}\sum_{l=0}^{i-1} N_i^l, \varphi_1(\widehat{R_i^1 N}), \ldots, \varphi_{m-1}(\widehat{R_i^{m-1} N})\right),$$

$$i = \overline{1, n-1},$$

$$N_F^n = \sigma_n \min\left(\frac{1}{a_n^0}\sum_{l=0}^{n-1} N_n^l, \varphi_1(\widehat{R_n^1 N}), \ldots, \varphi_{m-1}(\widehat{R_i^{m-1} N})\right),$$

$$F = \sigma_F \min\left(\frac{1}{a_F^0}\sum_{i=0}^{n} N_F^i, \varphi_1(\widehat{R_F^1 N}), \ldots, \varphi_{m-1}(\widehat{R_F^{m-1} N})\right). \qquad (1.18)$$

Сделав замены $\varphi_j(\widehat{R_i^j N}) = \frac{1}{a_i^j} R_i^j N$ и $\varphi_j(\widehat{R_F^j N}) = \frac{1}{a_n^j} R_F^j N$, $j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{1, n}$, получаем систему (1.12)-(1.15). Значение целевой функции F (1.18) совпадает с (1.15).

Для поиска оптимальных значений $\widehat{R_i^j N}$ и $\widehat{R_F^j N}$, $j = \overline{1, m-1}$, $i = \overline{1, n}$, нужно сделать обратную замену и решить систему нелинейных уравнений.

- В условиях неопределенности. Значение целевой функции F_ε для СП в условиях неопределенности является решением системы (1.19)-(1.21), где N_i^0, N_F^0, $R_i^j N$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m-1}$) — компоненты вектора $\varphi^*(n, m)$ (решение задачи (1.17)).

$$\sum_{j=i+1}^{n} \left(\hat{N}_j^i + \hat{N}_F^i\right) = S_i \min\left(\frac{N_i^0 + \sum\limits_{l=1}^{i-1} \hat{N}_i^l}{a_i^0(1 \pm \varepsilon_i)}, \frac{R_i^1 N}{a_i^1(1 \pm \varepsilon_i)}, \ldots, \frac{R_i^{m-1} N}{a_i^{m-1}(1 \pm \varepsilon_i)}\right),$$

$$i = \overline{1, n-1} \quad (1.19)$$

$$\hat{N}_F^n = S_n \min\left(\frac{N_n^0 + \sum\limits_{l=1}^{n-1} \hat{N}_n^l}{a_n^0(1 \pm \varepsilon_n)}, \frac{R_n^1 N}{a_n^1(1 \pm \varepsilon_n)}, \ldots, \frac{R_i^{m-1} N}{a_n^{m-1}(1 \pm \varepsilon_n)}\right) \qquad (1.20)$$

$$F_\varepsilon = S_A \min\left(\frac{N_F^0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{N}_F^i}{A^0(1 \pm \varepsilon_F)}, \frac{R_F^1 N}{A^1(1 \pm \varepsilon_F)}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{A^{m-1}(1 \pm \varepsilon_F)}\right) \qquad (1.21)$$

Проиллюстрируем функционирование в условиях неопределенности СП на следующем примере.

Пример 2. Пусть $m = 3$, $N = 0.1$, $R^1 N = 1$, $R^2 N = 1$:

– При $n = 1$, $a_1^i = A^i = 1$, $i = 0, 1, 2$. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_F = 0.3$, $\hat{a}_1^i = a_1^i(1 \pm \varepsilon_1)$ ($\hat{a}_1^0 = 0.7$, $\hat{a}_1^1 = 1.3$, $\hat{a}_1^2 = 0.7$), $\hat{A}^i = A^i(1 \pm \varepsilon_F)$, ($\hat{A}^1 = 0.7$, $\hat{A}^2 = 1.3$, $\hat{A}^2 = 0.7$,) $i = 0, 1, 2$.

В примере 1 в условиях определенности получили:

$$\varphi^*(1,3) = \left(N_1^0, R_1^1 N, R_1^2 N, N_F^0, N_F^1, R_F^1 N, R_F^2 N, F\right) =$$
$$= (0.10,\ 0.10,\ 0.10,\ 0.00,\ 0.30,\ 0.30,\ 0.30,\ 0.90)\,.$$

$$N_F^1 = 2.7 \min(\frac{0.1}{0.7}, \frac{0.1}{1.3}, \frac{0.1}{0.7}) = \frac{0.27}{1.3} = 0.2077.$$
$$F_\varepsilon = 2.7 \min(\frac{0.2077}{0.7}, \frac{0.3}{1.3}, \frac{0.3}{0.7}) = 2.7 \cdot \frac{0.3}{1.3} = 0.6229.$$

– При $n = 2$, $a_1^i = a_2^i = A^i = 1$, $i = 0, 1, 2$.

В примере 1 в условиях определенности получили:

$$\varphi^*(2,3) = (N_1^0, N_2^0, N_2^1, R_1^1 N, R_2^1 N, R_1^2 N, R_2^2 N,$$
$$N_F^0, N_F^1, N_F^2, R_F^1 N, R_F^2 N, F) =$$
$$= (0.10,\ 0.00,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.20,$$
$$0.00,\ 0.10,\ 0.60,\ 0.70,\ 0.70,\ 2.10).$$

Пусть $\varepsilon = 0.3$, $\hat{a}_1^i = a_1^i(1 \pm \varepsilon)$ ($\hat{a}_1^0 = 0.7$, $\hat{a}_1^1 = 1.3$, $\hat{a}_1^1 = 0.7$, $\hat{a}_2^0 = 0.7$, $\hat{a}_2^1 = 1.3$, $\hat{a}_2^1 = 0.7$), $\hat{A}^i = A^i(1 \pm \varepsilon)$, ($\hat{A}^1 = 0.7$, $\hat{A}^2 = 1.3$, $\hat{A}^2 = 0.7$,)

$i = 0, 1, 2$:

$$\hat{N}_2^1 + \hat{N}_F^1 = 2.7 \min(\frac{N_1^0}{0.7}, \frac{R_1^1 N}{1.3}, \frac{R_1^2 N}{0.7}) = \\ = 2.7 \min(\frac{0.066}{0.7}, \frac{0.066}{1.3}, \frac{0.066}{0.7}) = 0.137,$$

$$\hat{N}_F^2 = 2.7 \min(\frac{\hat{N}_2^1 + N_2^0}{0.7}, \frac{R_2^1 N}{1.3}, \frac{R_2^2 N}{0.7}) = \\ = 2.7 \min(\frac{0.137 + 0.033}{0.7}, \frac{0.233}{1.3}, \frac{0.233}{0.7}) = 0.484,$$

$$F_\varepsilon = 2.7 \min(\hat{N}_F^2 + \hat{N}_F^1 + N_F^0, R_F^1 N, R_F^2 N) = \\ = 2.7 \min(\frac{0.484 + 0 + 0}{0.7}, \frac{0.7}{1.3}, \frac{0.7}{0.7}) = 1.453;$$

– При $n = 3$, $a_1^i = a_2^i = a_3^i = A^i = 1$, $i = 0, 1, 2$. В примере 1 в условиях определенности получили:

$$\varphi^*(2, 3) = (N_1^0, N_2^0, N_3^0, N_2^1, N_3^1, N_3^2, R_1^1 N, R_2^1 N, R_3^1 N, R_1^2 N, R_2^2 N, R_3^2 N, \\ N_F^0, N_F^1, N_F^2, N_F^3, R_F^1 N, R_F^2 N, F) = \\ = (0.10,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.20,\ 0.00,\ 0.00,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.00,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.00, \\ 0.00,\ 0.10,\ 0.60,\ 0.00,\ 0.70,\ 0.70,\ 2.10).$$

$$\hat{N}_2^1 + \hat{N}_3^1 + \hat{N}_F^1 = 2.7 \min(\frac{N_1^0}{0.7}, \frac{R_1^1 N}{1.3}, \frac{R_1^2 N}{0.7}) = \\ = 2.7 \min(\frac{0.1}{0.7}, \frac{0.1}{1.3}, \frac{0.1}{0.7}) = 0.208,$$

$$\hat{N}_3^2 + \hat{N}_F^2 = 2.7 \min(\frac{\hat{N}_2^1 + N_2^0}{0.7}, \frac{R_2^1 N}{1.3} \frac{, R_2^2 N}{0.7}) = \\ = 2.7 \min(\frac{0.2 + 0.}{0.7}, \frac{0.2}{1.3}, \frac{0.2}{0.7}) = 0.415,$$

$$\hat{N}_F^3 = 2.7\min(\frac{N_3^0 + N_3^1 + N_3^2}{0.7}, \frac{R_3^1 N}{0.7}, \frac{R_3^2 N}{0.7}) =$$
$$= 2.7\min(0,0,0) = 0,$$

$$F_\varepsilon = 2.7\min(\frac{\hat{N}_F^3 + \hat{N}_F^2 + \hat{N}_F^1 + N_F^0}{0.7}, \frac{R_F^1 N}{1.3}, \frac{R_F^2 N}{0.7}) =$$
$$= 2.7\min(\frac{0.0 + 0.415 + 0.008 + 0}{0.7}, \frac{0.7}{1.3}, \frac{0.7}{0.7}) = 1.453;$$

Модель комплексного преобразователя

- В условиях определенности. Структура комплексного преобразователя (КП) — совокупность СП, обеспечивающих возможность вспомогательного производства каждого из факторов — представлена на рис. 1.22

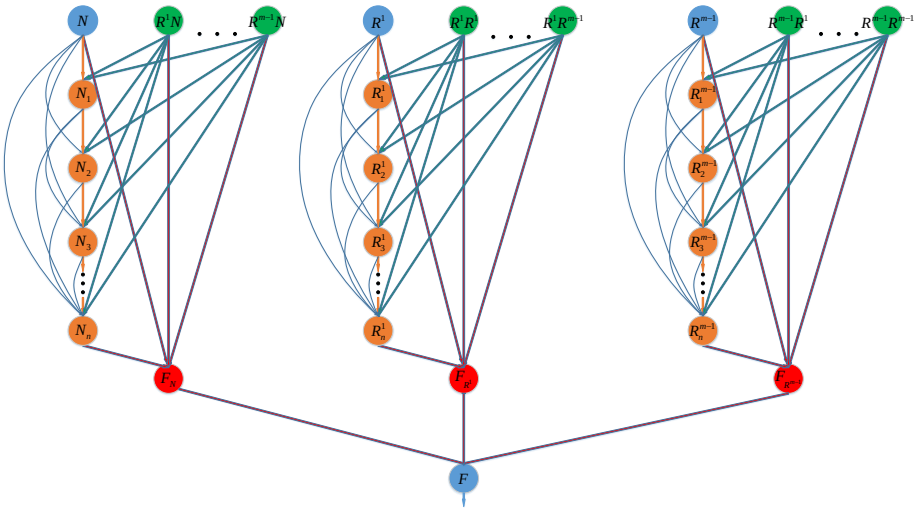

Рисунок 1.22 — Структура комплексного преобразователя

ПФ КП на рис. 1.22 состоит из m СП (см. рис. 1.11), каждый из которых соответственно производит недостающие части факторов N, R^1, …, R^{m-1}. На рис. 1.22 обозначено: R^1N, …, $R^{m-1}N$ — соответственно части факторов R^1, …, R^{m-1}, участвующие в производстве недостающей части факто-

ра N; R^1R^1, ..., $R^{m-1}R^1$ — соответственно части факторов R^1, ..., R^{m-1}, участвующие в производстве недостающей части фактора R_1; R^1R^{m-1}, ..., $R^{m-1}R^{m-1}$ — соответственно части факторов R^1, ..., R^{m-1}, участвующие в производстве недостающей части фактора R^{m-1}. ПФ этого КП имеет вид:

$$F = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \min\left(\frac{F_N}{A_0}, \frac{F_{R^1}}{A_1}, \ldots, \frac{F_{R^{m-1}}}{A_{m-1}}\right) \to \max_{\Phi,\vec{n}}, \tag{1.22}$$

где $F_N, F_{R^1}, \ldots, F_{R^{m-1}}$ — значения соответствующего СП (определяются аналогично (1.15)). $\Phi = (\varphi_N, \varphi_{R^1}, \ldots, \varphi_{R^{m-1}}, \varphi_P)$ — вектор факторных потоков структуры КП, а φ_N, φ_{R^1}, ..., $\varphi_{R^{m-1}}$ — вектора факторных потоков соответствующего СП (определяются аналогично (1.16); принцип формирования вектора факторных потоков и матрицы ограничений для задачи ЛП описаны в разделе 1.3.2), $\vec{n} = (n_N, n_{R^1}, \ldots, n_{R^{m-1}})$, где $n_N, n_{R^1}, \ldots, n_{R^{m-1}}$ — число слоев каждого СП ($N, R^1, \ldots, R^{m-1}$).

Следствие 2. *Оптимальная структура КП с квазилинейной ПФ Леонтьева является решением задачи параметрического математического программирования, решение которой совпадает с решением оптимизационной задачи (1.22).*

- В условиях неопределенности. Значение целевой функции F_ε для КП в условиях неопределенности является решением уравнения (1.23)

$$F_\varepsilon = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \min\left(\frac{F_{\varepsilon N}}{A_0}, \frac{F_{\varepsilon R^1}}{A_1}, \ldots, \frac{F_{\varepsilon R^{m-1}}}{A_{m-1}}\right), \tag{1.23}$$

где $F_{\varepsilon N}$, $\{F_{\varepsilon R^j}\}_{j=1}^{m-1}$ — значения целевой функции для соответствующего СП в условиях неопределенности, так $F_{\varepsilon N}$ является решением системы (1.19)–(1.21).

Модель специализированного преобразователя

- В условиях определенности. Целевая функция (ПФ) N_b для СпП (см. рис. 1.23) задается следующими соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i^0 = N; \sum_{i=1}^{n} R_i^j = R^j,\ j = \overline{1, m-1}; \tag{1.24}$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} N_j^i + N_F^i = \sigma_i \min\left(\frac{1}{a_i^0}\sum_{l=0}^{i-1} N_i^l, \frac{1}{a_i^1}R_i^1, \frac{1}{a_i^2}R_i^2, \ldots, \frac{1}{a_i^{m-1}}R_i^{m-1}\right), i = \overline{1, n-1} \tag{1.25}$$

$$N_F^n = \sigma_n \min\left(\frac{1}{a_n^0}\sum_{l=0}^{n-1} N_n^l, \frac{1}{a_n^1}R_n^1, \frac{1}{a_i^2}R_n^2, \ldots, \frac{1}{a_n^{m-1}}R_i^{m-n}\right) \tag{1.26}$$

$$N_b = \sum_{i=1}^{n} \rho_i N_F^i \tag{1.27}$$

Из переменных системы (1.24)-(1.27) составим вектор факторных потоков

$$\varphi(n, m) = \left(\{\{N_i^j\}_{i=j+1}^{n}\}_{j=0}^{n-1}, \{\{R_i^l\}_{i=1}^{n}\}_{l=1}^{m-1}, \{N_F^i\}_{i=1}^{n}\right), \tag{1.28}$$

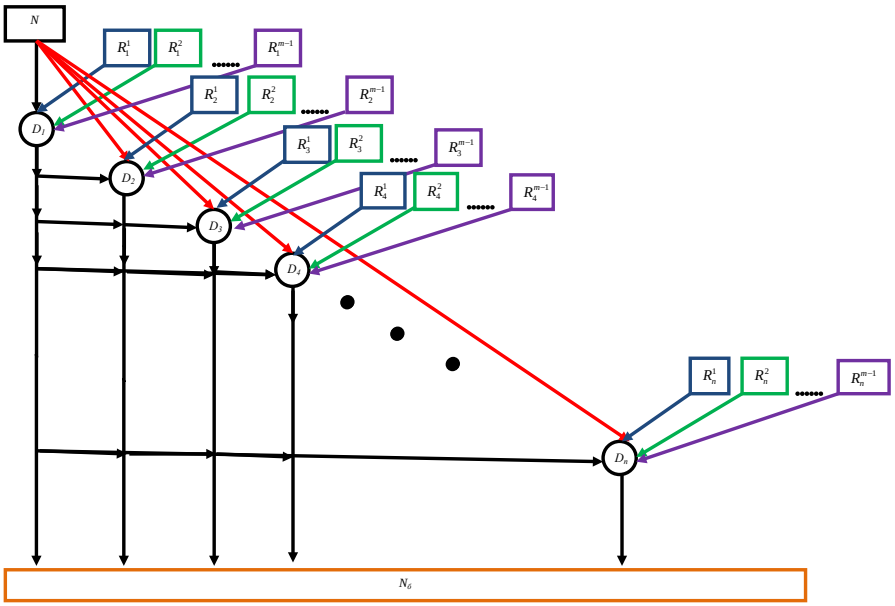

Рисунок 1.23 — Структура специализированного преобразователя (структура S_3)

Утверждение 3. *Оптимальная структура СпП, описываемого системой*

(1.24)-(1.27), является решением следующей задачи параметрического линейного программирования

$$N_b = (\hat{\rho}, \varphi) \to \max_{\varphi(n,m),n}, \sum_{j=1}^{p(n,m)} M(n,m)_{ij}\varphi(n,m)_j \le \beta_i, i = \overline{1, u(n,m)},$$

$$\beta = \left(N, R^1, R^2, \ldots, R^{m-1}, 0, \ldots, 0\right)^T,$$

$$p(n,m) = \frac{n(n+2m+1)}{2}, u(n,m) = m(n+1). \quad (1.29)$$

$n^* = \min\left(\arg\max_n \varphi_F(n)\right)$, *где* $\varphi_F(n)$ *— решение задачи (1.29).*

Утверждение 4. *Оптимальная структура СпП с квазилинейной ПФ Леонтьева является решением задачи параметрического математического программирования, решение которой совпадает с решением оптимизационной задачи (1.29).*

Доказательство. Доказательство следует из Утверждения 2.

- В условиях неопределенности. Значение целевой функции $N_{b\varepsilon}$ для СП в условиях неопределенности является решением системы (1.30)–(1.32), где N_i^0, N_F^0, $R_i^j N$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m-1}$) — компоненты вектора $\varphi^*(n,m)$ (решение задачи (1.29)).

$$\sum_{j=i+1}^{n} \hat{N}_j^i + \hat{N}_F^i = \sigma_i \min\left(N_i^0 + \frac{\sum_{l=1}^{i-1} \hat{N}_i^l}{a_i^0(1 \pm \varepsilon_i)}, \frac{R_i^1}{a_i^1(1 \pm \varepsilon_i)}, \ldots, \frac{R_i^{m-1}}{a_i^{m-1}(1 \pm \varepsilon_i)}\right)$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad (1.30)$$

$$N_F^n = \sigma_n \min\left(\frac{N_n^0 + \sum_{l=1}^{n-1} N_n^l}{a_n^0(1 \pm \varepsilon_n)}, \frac{R_n^1}{a_n^1(1 \pm \varepsilon_n)}, \ldots, \frac{R_i^{m-n}}{a_n^{m-1}(1 \pm \varepsilon_n)}\right), \quad (1.31)$$

$$N_{b\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \hat{N}_F^i. \tag{1.32}$$

1.3.2 Алгоритм оптимизации

Оптимальная иерархическая структура производственной подсистемы предприятия со структурнозависимой ПФ леонтьевского типа является внешним параметром задачи параметрического линейного программирования, величина которого влияет на размерность рассматриваемой задачи. В зависимости от параметра и вида иерархической структуры производственной подсистемы предприятия изменяется специфика строения матрицы ограничений задачи параметрического линейного программирования.

Полная автоматизация построения матрицы ограничений задачи ЛП для поиска оптимальных иерархических структур производственных подсистем предприятий является весьма сложной задачей (задача ЛП большой размерности, в нашем случае с параметрической размерностью, с разреженными матрицами со сложной и разветвленной блочной структурой), которая должна решаться на уровне содержательной формулировки исследуемой модели. В настоящем разделе предложен алгоритм автоматического вывода соответствующих уравнений и балансовых ограничений. Созданный алгоритм позволяет решить задачи численной оптимизации и оптимального управления иерархической структурой, допускающей рекурсивное построение, и вследствие этого — построение целевой функции в виде суперпозиции элементарных функций, отвечающих вершинам иерархического графа. Созданный алгоритм применяется для численной оптимизации и оптимального управления структурой производственной подсистемы предприятия для предложенных в разделе 1.2.1 структурных моделей

ПФ.

В качестве основного метода решения задачи линейного программирования используется симплекс-метод. Был реализован модифицированный симплекс-метод с выбором ведущего элемента по алгоритму Bland R.G., устраняющему зацикливание [94; 111].

Так же описывается вычисление размерностей матрицы ограничений задачи ЛП ($u(n,m) \times p(n,m)$).

Общее количество ограничений (неравенств) $u(n,m)$ задачи ЛП состоит из распределения исходных факторов производства по структуре производственной подсистемы предприятия (всего m — ограничений), а также в каждой вершине иерархического графа структуры производственной подсистемы предприятия по m ограничений.

Общее число переменных $p(n,m)$, т.е. дуг соответственного иерархического графа (или $p(n,m) = |E|$)).

Число дуг в иерархическом графе $G(V,E)$ согласно «лемме о рукопожатиях» [45] равно

$$|E| = \sum_{v \in V} d(v),$$

где $d(v)$ — число дуг с началом в вершине v.

Алгоритм оптимизации структуры универсального преобразователя

Найдем размерность задачи линейного программирования (1.8).

Вычислим число ограничений $u(n,m)$ в задаче линейного программирования (1.17). Ограничение на величину факторов производства, то есть (1.3) — m ограничений, распределение промежуточных факторов по структуре СП: (1.4)–

(1.6) — $m(nm+1)$ ограничений:

$$u(n,m) = m^2(n+2).$$

Вычислим число переменных $p(n,m)$ в задаче линейного программирования (1.8):

$$p(n,m) = |E| + 1 = \sum_{j=1}^{m} d(R^j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(D_{ij}) + d(F) =$$
$$= m(mn+1) + \sum_{i=1}^{n}((n-i)m+1)m + 1 = \frac{m(n+1)(nm+2)+2}{2}.$$

Выпишем правило формирования вектора $\varphi(n,m)$ (1.7).

Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор. Введем функцию $\mu(X, x_i) = i$.

$$\mu(\varphi(n,m), R^{0,k}_{j,i}) = (k-1)p + (j-1)m + i - 1,\ k = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m},$$

где p — количество переменных для одного фактора.

$$\mu(\varphi(n,m), R^{i,l}_{k,j}) = (l-1)p + \frac{mi(2n-(i-1)}{2} + j - 1 + (k-(i+1))n,$$
$$i = \overline{1,n-1},\ k = \overline{i,n},\ j = \overline{1,m},\ l = \overline{i,m},$$

$$\mu(\varphi(n,m), R^{i,l}_{F}) = p(n,m) - nm + il - 1,\ i = \overline{0,n},\ l = \overline{1,m}.$$

Алгоритм оптимизации структуры сложного преобразователя

Найдем размерность задачи линейного программирования (1.17).

Вычислим число ограничений $u(n,m)$ в задаче линейного программирова-

ния (1.17). Ограничение на величину факторов производства, то есть (1.12) — m ограничений, распределение промежуточных факторов по структуре СП: (1.13)–(1.15) — $m(n+1)$ ограничений:

$$u(n,m) = m(n+2).$$

Вычислим число переменных $p(n,m)$ в задаче линейного программирования (1.17):

$$p(n,m) = |E| + 1 = N + \sum_{j=1}^{m-1} d(R^j N) + \sum_{i=1}^{n} d(N_i) + d(F) =$$
$$= n + 1 + (m-1)(n+1) + \frac{(n+1)n}{2} + 1 = \frac{(n+1)(2m+n)+2}{2}.$$

Выпишем правило формирования вектора $\varphi(n,m)$ (1.16).

$$\mu(\varphi(n,m), N_j^i) = (n-1)i - \frac{(i-1)i}{2} + j,\ j = \overline{i+1,n},\ i = \overline{0,n}$$
$$\mu(\varphi(n,m), R_i^l) = \mu(\varphi(n,m), N_n^{n-1}) + (l-1)n + i,\ l = \overline{1,m-1},\ i = \overline{1,n},$$
$$\mu(\varphi(n,m), N_F^i) = p(n) - i,\ i = \overline{0,n}.$$

Таким образом, мы однозначно определили место каждого факторного потока в векторе $\varphi(n,m)$.

Опишем алгоритм автоматического построения структуры матрицы ограничений задачи ЛП $M(n,m)$ размерностью $u(n,m) \times p(n,m)$ для СП.

Заполним первые m строк согласно (1.12).

$$M_{1,\mu(\varphi(n,m),N_i^0)} = 1, \quad M_{1+l,\mu(\varphi(n,m),R_i^l)} = 1, \quad i = \overline{1,n},\ l = \overline{1,m-1}.$$

Заполним следующие $m(n-1)$ строку согласно (1.13).

$$M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_i^l)} = -\frac{\sigma_i}{a_i^0},$$

$$M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_j^i)} = M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^i)} = 1,$$

$$l = \overline{0, i-1}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{i+1, n}.$$

$$M_{m+m(i-1)+1+k,\mu(\varphi(n,m),R_i^k)} = -\frac{\sigma_i}{a_i^k},$$

$$M_{m+m(i-1)+1+k,\mu(\varphi(n,m),N_j^i)} = M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^i)} = 1,$$

$$k = \overline{1, m-1}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{i+1, n}.$$

Заполним следующие m строк согласно (1.14).

$$M_{u(n,m)-2m+1,\mu(\varphi(n,m),N_n^l)} = -\frac{\sigma_n}{a_n^0},$$

$$M_{u(n,m)-2m+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^n)} = 1,$$

$$l = \overline{0, n-1},$$

$$M_{u(n,m)-2m+k+1,\mu(\varphi(n,m),R_n^k)} = -\frac{\sigma_n}{a_n^k},$$

$$M_{u(n,m)-2m+k+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^n)} = 1,$$

$$k = \overline{1, m-1}.$$

Заполним последние m строк согласно (1.15).

$$M_{u(n,m)-m+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^i)} = -\frac{\Sigma_n}{A^0},$$

$$M_{u(n,m)-m+1,\mu(\varphi(n,m),\varphi_F)} = 1,$$

$$i = \overline{0, n},$$

$$M_{u(n,m)-m+k+1,\mu(\varphi(n,m),R_F^k)} = -\frac{\Sigma_n}{A^k},$$

$$M_{u(n,m)-m+k+1,\mu(\varphi(n,m),\varphi_F)} = 1,$$

$$k = \overline{1, m-1}.$$

Все остальные элементы матрицы $M(n,m)$ заполним нулями.

Пример 3. Так при $m = 3$ задача параметрического линейного программирования (1.17) имеет вид:

$$M(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(1,3) = \begin{pmatrix} N_1^0 & R_1^1 N & R_1^2 N & N_F^0 & N_F^1 & R_F^1 N & R_F^2 N & F \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} N & R^1 N & R^2 N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(2,3) = \begin{pmatrix} N_1^0 & N_2^0 & N_2^1 & R_1^1 N & R_2^1 N & R_1^2 N \\ R_2^2 N & N_F^0 & N_F^1 & N_F^2 & R_F^1 N & R_F^2 N & F \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} N & R^1 N & R^2 N & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На рис. 1.24 представлены вычислительные характеристики реализованных алгоритмов.

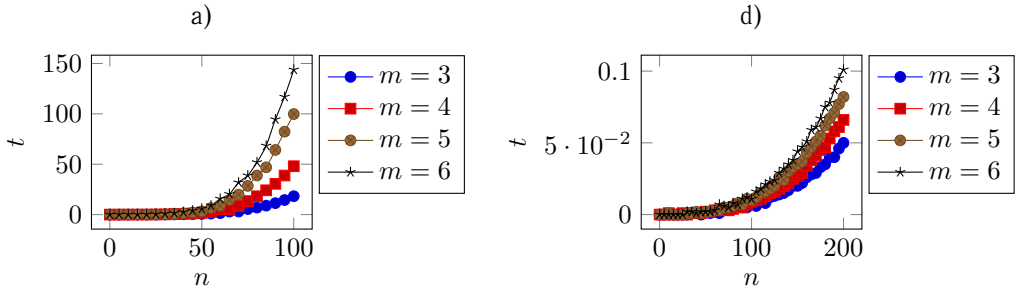

Рисунок 1.24 — a) Время решения задачи (1.17) в зависимости от параметра n; b)Время на формирования балансовых соотношений задачи (1.17)

Алгоритм оптимизации структуры комплексного преобразователя

Матрица ограничений для структуры КП имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} M_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{R^1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{R^1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{R^{m-1}} & 0 \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & F_{R^1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & F_{R^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & F_{R^{m-1}} & 1 \end{pmatrix},$$

где M_i ($i = \overline{N, \{R^j\}_{j=1}^{m-1}}$) — матрицы ограничений соответствующего СП (см. раздел 1.3.2). Размерность матрицы M $U(\vec{n}, m) \times P(\vec{n}, m)$, где

$$U(\vec{n}, m) = \sum_{i=\overline{N, \{R^j\}_{j=1}^{m-1}}} u(n_i, m) + m,$$

$$P(\vec{n}, m) = \sum_{i=\overline{N, \{R^j\}_{j=1}^{m-1}}} p(n_i, m) + 1.$$

$$F_i = \left(\underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{p(n_i, m)} \right), i = \overline{N, \{R^j\}_{j=1}^{m-1}}$$

Алгоритм оптимизации структуры специализированного преобразователя

Найдем размерность задачи линейного программирования (1.29).

Вычислим число ограничений $u(n,m)$ в задаче линейного программирования (1.29). Ограничение на величину факторов производства, то есть (1.24) — m ограничений, распределение промежуточных факторов по структуре СП: (1.25)–(1.26) — $m(nm+1)$ ограничений:

$$u(n,m) = m(n+1).$$

Вычислим число переменных $p(n,m)$ в задаче линейного программирования (1.29):

$$p(n,m) = |E| = d(N) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} d(R_i^j) + \sum_{i=1}^{n} d(D_i) = \\ = n + (m-1)n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+2m+1)}{2}.$$

Выпишем правило формирования вектора $\varphi(n,m)$ (1.28).

Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор. Введем функцию $\mu(X, x_i) = i$.

$$\mu(\varphi(n,m), N_j^i) = (n-1)i - \frac{(i-1)i}{2} + j,\ j = \overline{i+1,n},\ i = \overline{0,n}$$

$$\mu(\varphi(n,m), R_i^l) = \mu(\varphi(n,m), N_n^{n-1}) + ln + i,\ l = \overline{1,m-1},\ i = \overline{1,n},$$

$$\mu(\varphi(n,m), N_F^i) = p(n) - n + i,\ i = \overline{1,n}.$$

Таким образом мы однозначно определили место каждого факторного потока в векторе $\varphi(n,m)$.

Опишем алгоритм автоматического построения структуры матрицы ограничений задачи ЛП $M(n,m)$ размерностью $u(n,m) \times p(n,m)$ для СпП:

Заполним первые m строк согласно (1.24).

$$M_{1,\mu(\varphi(n,m),N_i^0)} = 1, \quad M_{1+l,\mu(\varphi(n,m),R_i^l)} = 1,$$
$$i = \overline{1,n},\ l = \overline{1,m-1}.$$

Заполним следующие $m(n-1)$ строку согласно (1.25).

$$M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_i^l)} = -\frac{\sigma_i}{a_i^0},$$
$$M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_j^i)} = M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^i)} = 1,$$
$$l = \overline{0,i-1}, i = \overline{1,n-1}, j = \overline{i+1,n}.$$

$$M_{m+m(i-1)+1+k,\mu(\varphi(n,m),R_i^k)} = -\frac{\sigma_i}{a_i^k},$$
$$M_{m+m(i-1)+1+k,\mu(\varphi(n,m),N_j^i)} = M_{m+m(i-1)+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^i)} = 1,$$
$$k = \overline{1,m-1}, i = \overline{1,n-1}, j = \overline{i+1,n}.$$

Заполним последние m строк согласно (1.26).

$$M_{u(n,m)-m+1,\mu(\varphi(n,m),N_n^l)} = -\frac{\sigma_n}{a_n^0}, \quad M_{u(n,m)-m+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^n)} = 1, \quad l = \overline{0,n-1},$$

$$M_{u(n,m)-m+k+1,\mu(\varphi(n,m),R_n^k)} = -\frac{\sigma_n}{a_n^k}, M_{u(n,m)-m+k+1,\mu(\varphi(n,m),N_F^n)} = 1, \quad k = \overline{1,m-1}.$$

Все остальные элементы матрицы $M(n,m)$ заполним нулями.

На рис. 1.25 представлены вычислительные характеристики реализованных алгоритмов.

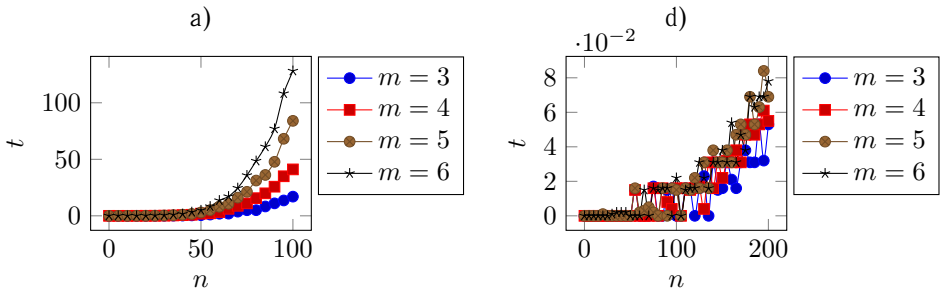

Рисунок 1.25 — a) Время решения задачи (1.29) в зависимости от параметра n; b)Время на формирования балансовых соотношений задачи (1.29)

1.3.3 Имитационное моделирование зависимости оптимальных симметричных иерархических структур от параметров Структура универсального преобразователя

- В условиях определенности. Обозначим $\lambda = \frac{F}{\sum\limits_{i=1}^{m} R^i}$. Внешними параметрами задачи (1.8) являются исходные межфакторные пропорции $R_i : R_k$ и пропорции технологических коэффициентов $a^i_{jl} : a^k_{jl}$ $(i, k, l = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$.

  Результаты решения задачи (1.8) некоторых значений переменных R_i и параметров a^i_{jl}, принимающих случайные значения из отрезка $K \subset R^+$, представлены на рис.1.26-1.27.

  На рис. 1.28–1.29 приведены некоторые решения задачи (1.8): графики изменения λ при $R^1 \in [0, 1]$, $R^2 \in [0, 1]$ с шагом $\Delta = 0.1$ и некоторых значениях параметра n.

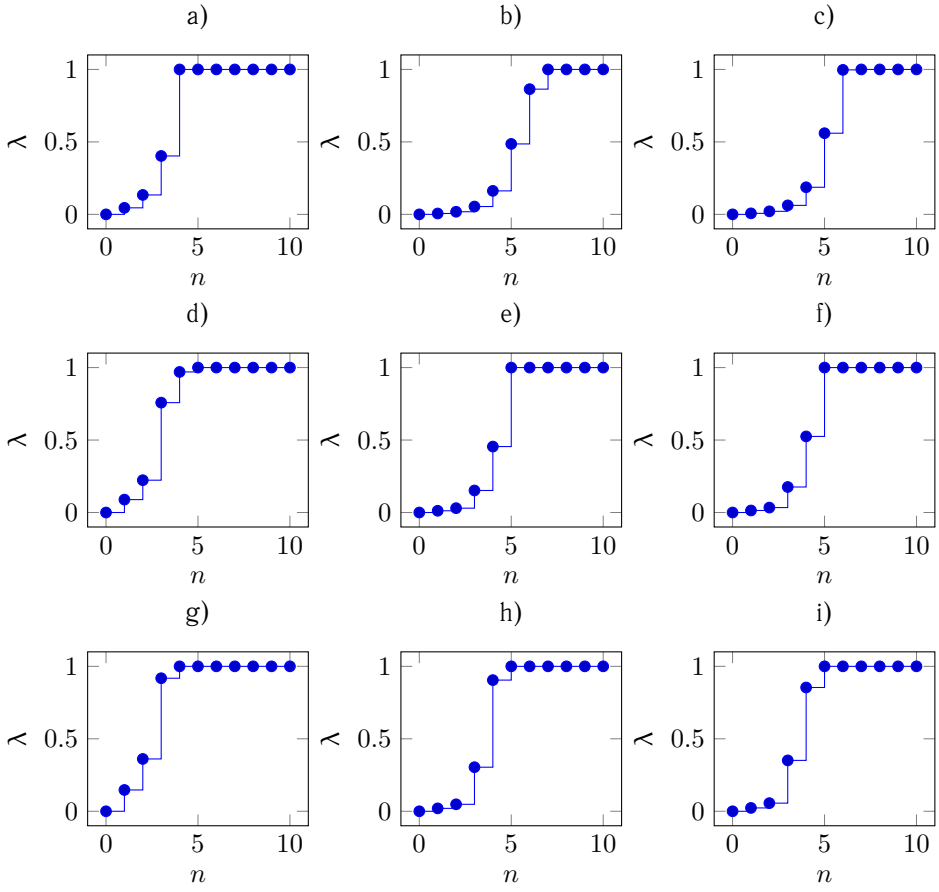

Рисунок 1.26 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 3$:
a) $R^1 = 0.01$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 4$;
b) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 7$;
c) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 0.8$; $K = \{1\}$; $n^* = 7$;
d) $R^1 = 0.01$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 5$;
e) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
f) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
g) $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$;
h) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$;
i) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$

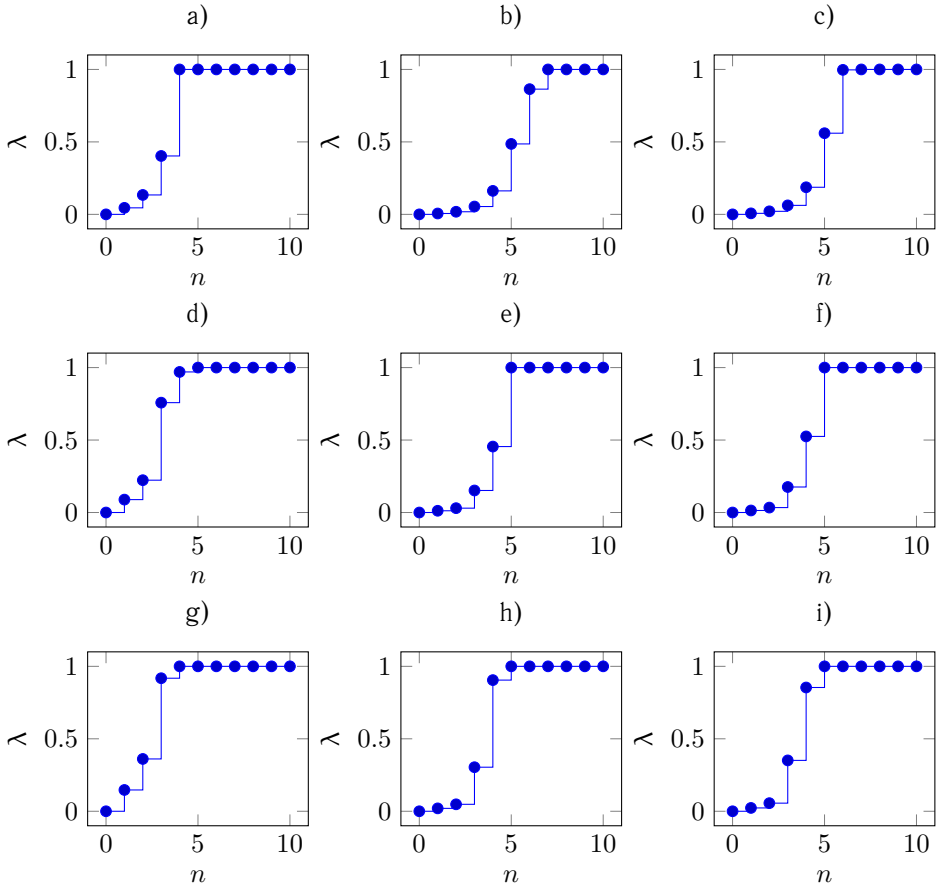

Рисунок 1.27 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 4$:
a) $R^1 = 0.01$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $R^4 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 4$;
b) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 1$; $R^4 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 7$;
c) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 0.8$; $R^4 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 7$;
d) $R^1 = 0.01$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $R^4 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 5$;
e) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 1$; $R^4 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
f) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 0.8$; $R^4 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
g) $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $R^4 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$;
h) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 1$; $R^4 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$;
i) $R^1 = 0.001$; $R^2 = 0.5$; $R^3 = 0.8$; $R^4 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$

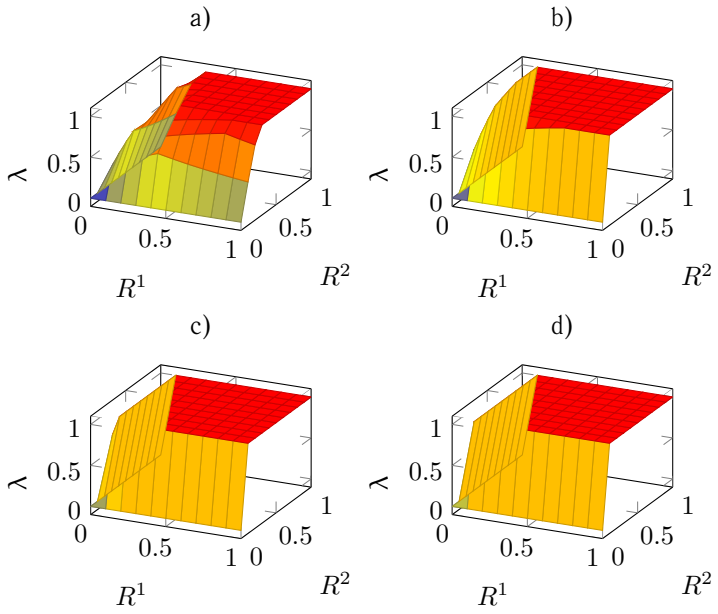

Рисунок 1.28 — График λ при $K = \{1\}$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$

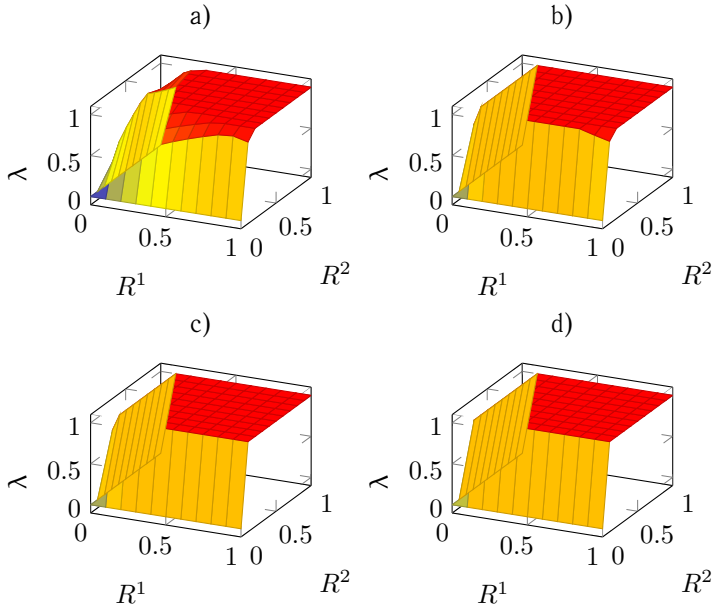

Рисунок 1.29 — График λ при $K = [1, 5]$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$

- В условиях неопределенности. Обозначим $\lambda_\varepsilon = \frac{F}{\sum\limits_{i=1}^{m} R^i}$. Результаты решения задачи (1.8) для некоторых значений переменных R_i, параметров a^i_{jl}, принимающих случайные значения из отрезка $K \subset R^+$, и некоторых значений параметра $\varepsilon = \varepsilon_j = \varepsilon_F$ $(j = \overline{1,n})$ представлены на рис.1.30.

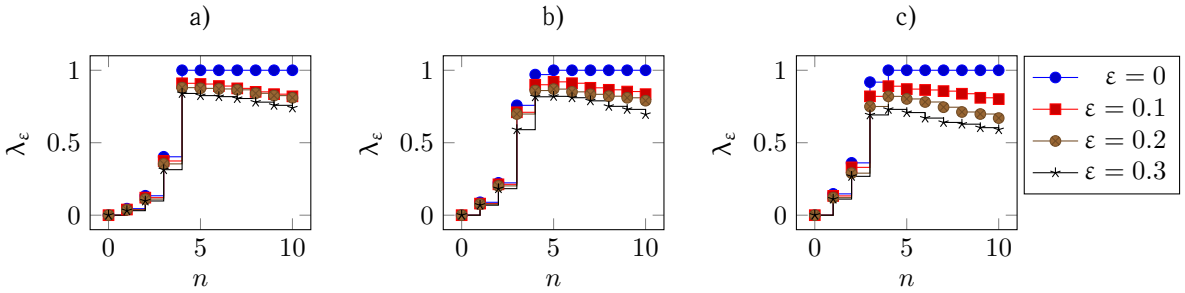

Рисунок 1.30 — График зависимости λ_ε от числа уровней n при $m = 3$, $R^1 = 0.01$, $R^2 = 1$, $R^3 = 1$: a) $K = \{1\}$; b) $K = [1, 5]$; c) $K = [1, 10]$

Структура сложного преобразователя

- В условиях определенности. Обозначим $\lambda = \frac{F}{N + \sum\limits_{i=1}^{m-1} R^i}$. Внешними параметрами задачи (1.17)являются исходные межфакторные пропорции $N : R^iN : R^jN$ $(i, j = \overline{1, m-1})$ и пропорции технологических коэффициентов $a^l_k : a^d_k$ $(k = \overline{1,n},\ d, l = \overline{0, m-1})$.

  Результаты решения задачи (1.17) для некоторых значений переменных N, R^iN $(i = \overline{1, m-1})$ и параметров a^l_k, принимающих случайные значения из отрезка $K \subset R^+$, представлены на рис. 1.31-1.32.

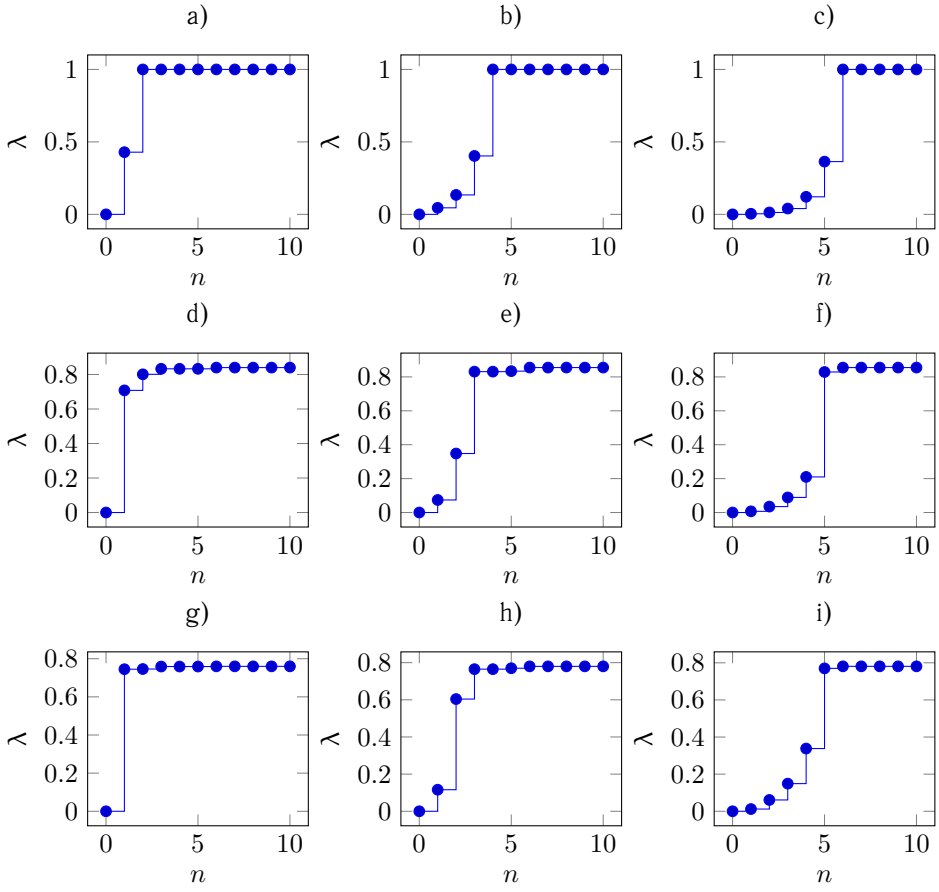

Рисунок 1.31 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 3$:
a) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 2$;
b) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 4$;
c) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 5$;
d) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
e) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
f) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 6$;
g) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$;
h) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$;
i) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 6$

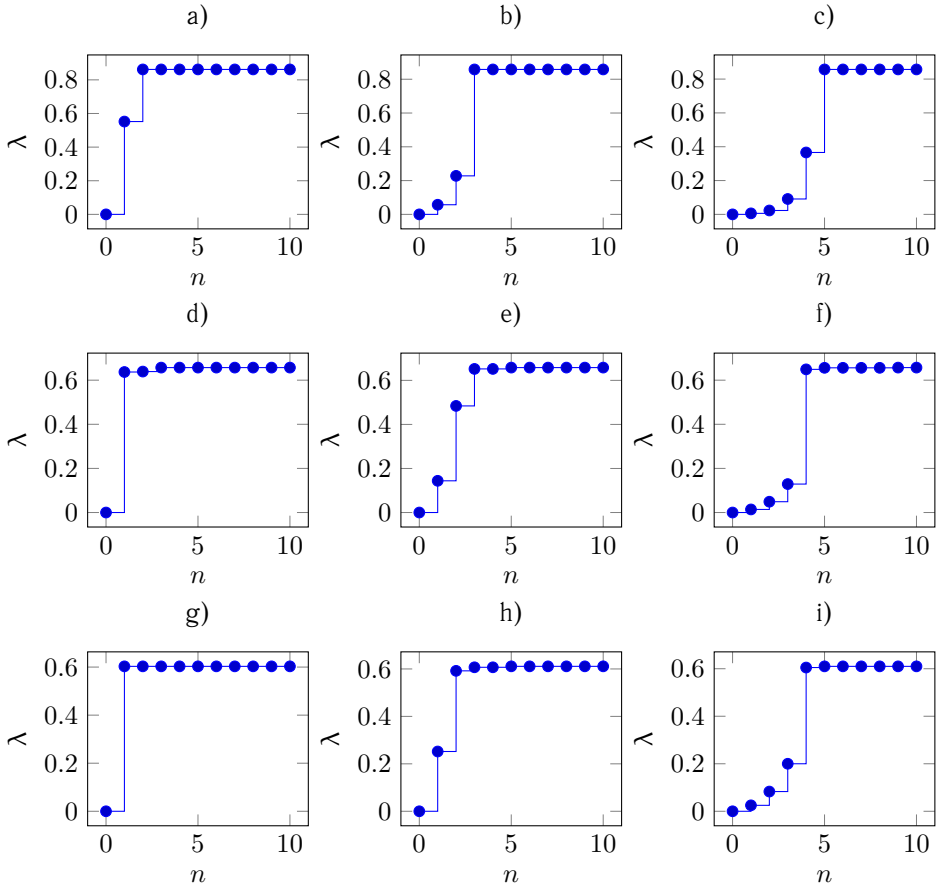

Рисунок 1.32 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 4$:
a) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = \{1\}$, $n^* = 2$;
b) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = \{1\}$, $n^* = 3$;
c) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = \{1\}$, $n^* = 5$;
d) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 5]$, $n^* = 3$;
e) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 5]$, $n^* = 5$;
f) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 5]$, $n^* = 5$;
g) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 10]$, $n^* = 1$;
h) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 10]$, $n^* = 5$;
i) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 0.8$; $K = [1, 10]$, $n^* = 5$

На рис. 1.33-1.35 приведены некоторые решения задачи (1.17): графики изменения λ при $N \in [0,1]$, $R^1 \in [0,1]$ с шагом $\Delta = 0.1$ и при некоторых значениях параметра n.

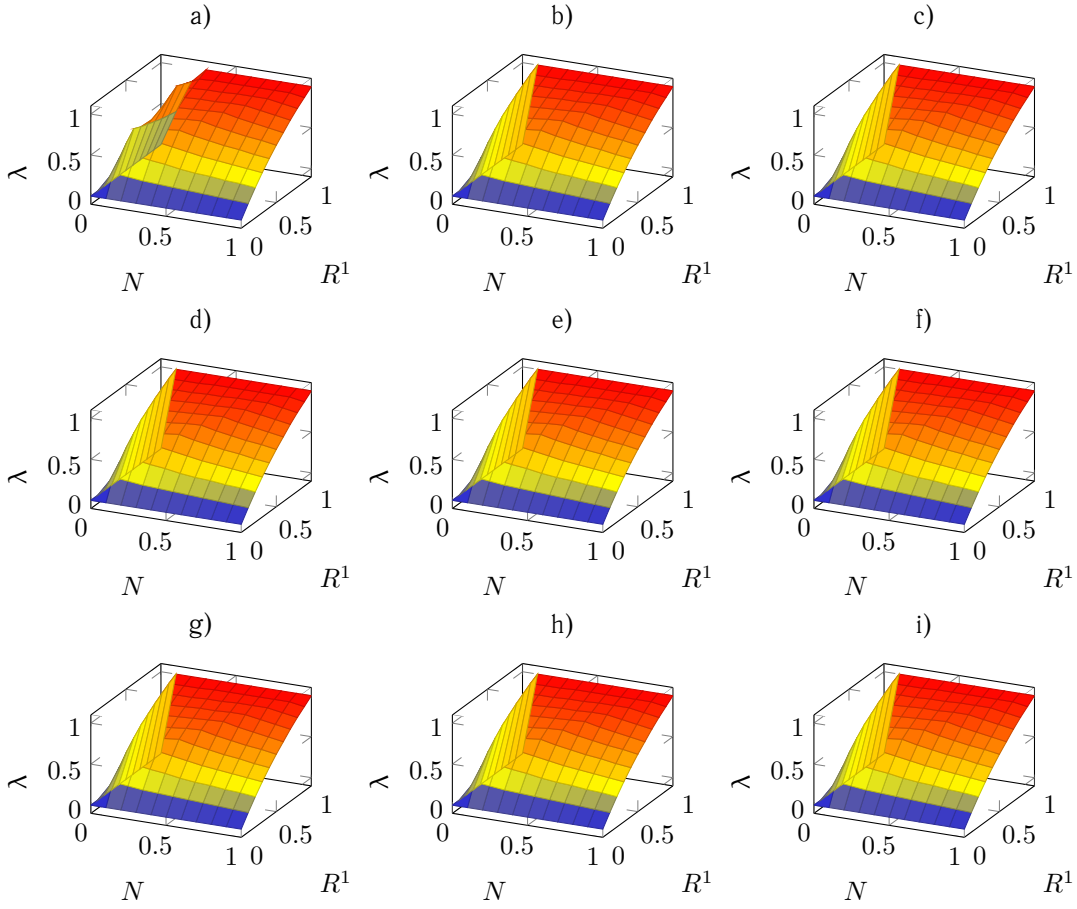

Рисунок 1.33 — График λ при $K = \{1\}$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 5$; f) $n = 6$; g) $n = 10$; h) $n = 50$; i) $n = 100$

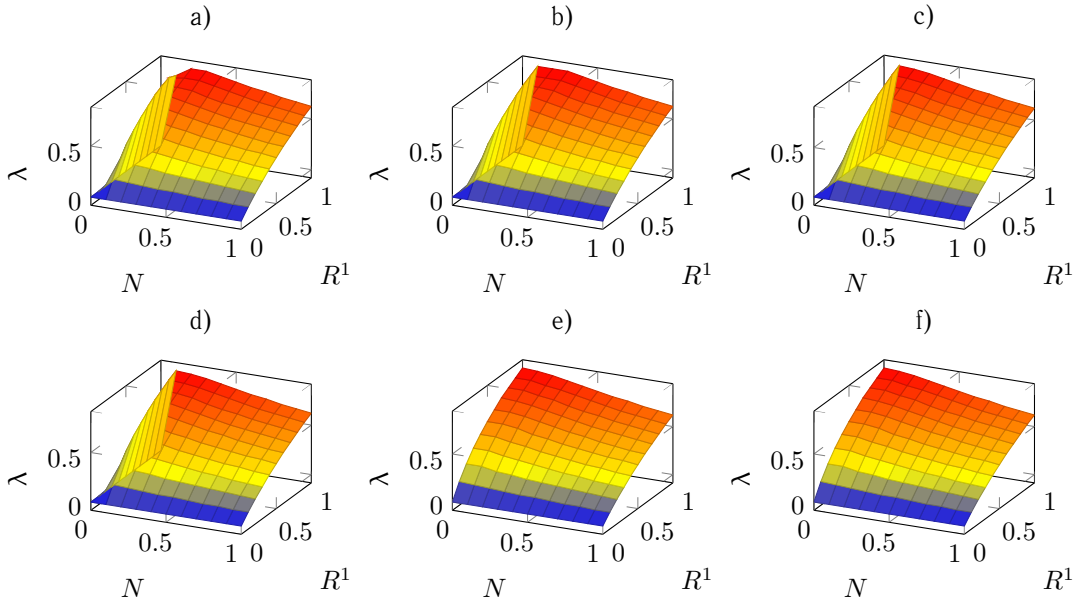

Рисунок 1.34 — График λ при $K = [1, 5]$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 50$; f) $n = 100$

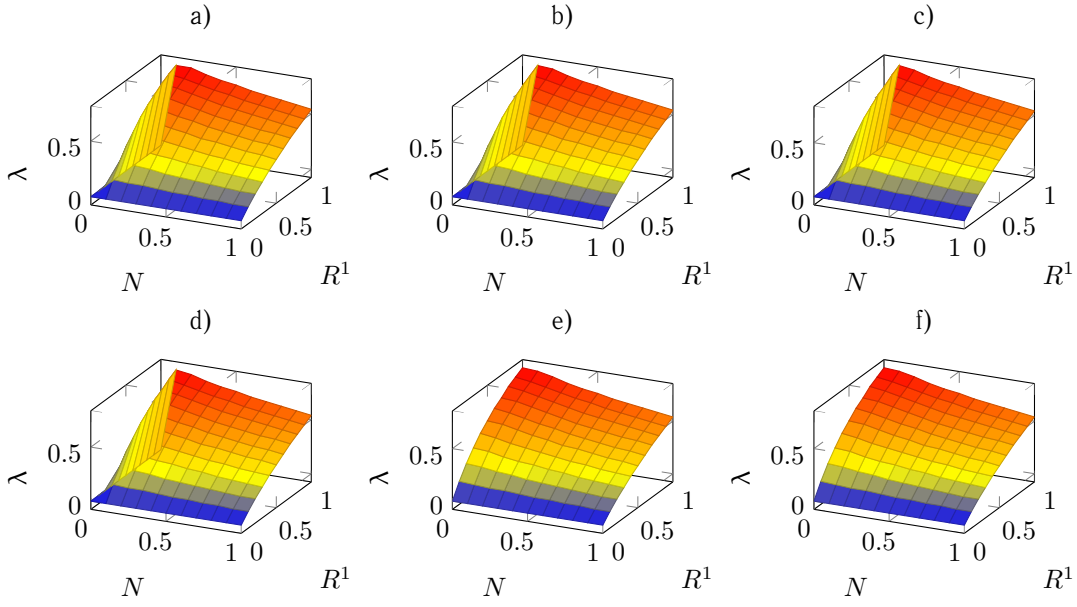

Рисунок 1.35 — График λ при $K = [1, 10]$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 50$; f) $n = 100$

- В условиях неопределенности. Обозначим $\lambda_\varepsilon = \frac{F_\varepsilon}{N + \sum\limits_{i=1}^{m-1} R^i}$.

  Результаты решения задачи (1.19)-(1.21) для некоторых значений переменных N, $R^i N$ $(i = \overline{1, m-1})$, параметров a_k^l, принимающих случайные значения из отрезка $K \subset R^+$, и некоторых значений параметра $\varepsilon = \varepsilon_j$ $(j = \overline{1, n})$ представлены на рис.1.36.

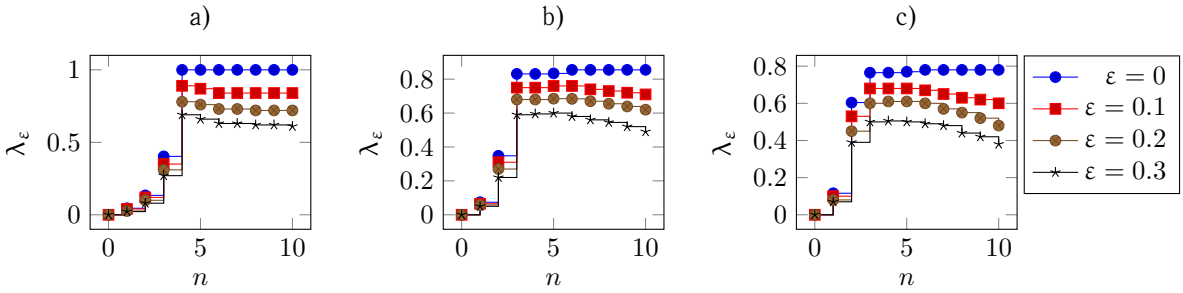

Рисунок 1.36 — График зависимости λ_ε от числа уровней n при $m = 3$, $N = 0.01$, $R^1 = 1$, $R^2 = 1$: a) $K = \{1\}$; b) $K = [1, 5]$; c) $K = [1, 10]$

Структура комплексного преобразователя

- В условиях определенности. Обозначим $\lambda = \frac{F}{N + \sum\limits_{i=1}^{m-1} R^i N + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \sum\limits_{j=1}^{m-1} R^i R^j}$. Внешними параметрами задачи (1.22) являются исходные межфакторные пропорции $N : R^i$ $(i = \overline{1, m-1})$ и пропорции технологических коэффициентов $a_k^l : a_k^d$ $(k = \overline{1, n},\ d, l = \overline{0, m-1})$.

  На рис. 1.37- 1.38 представлены результаты решения задач 1.22 для некоторых значений параметров.

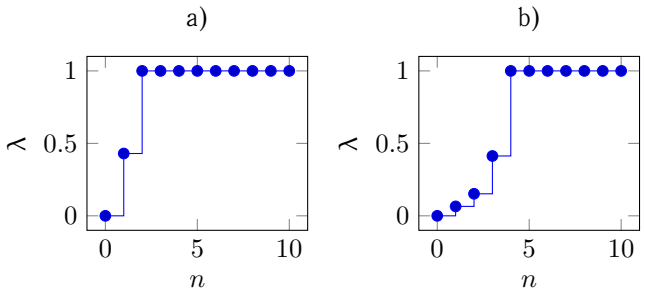

Рисунок 1.37 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 3$. a) $N = R^1 = R^2 = 1$, $R^iN = R^iR^j = 10$, $i, j = 1, 2$, $K = \{1\}$, $n^* = 2$, b) $N = R^1 = R^2 = 1$, $R^iN = R^iR^j = 100$, $i, j = 1, 2$, $K = \{1\}$, $n^* = 4$

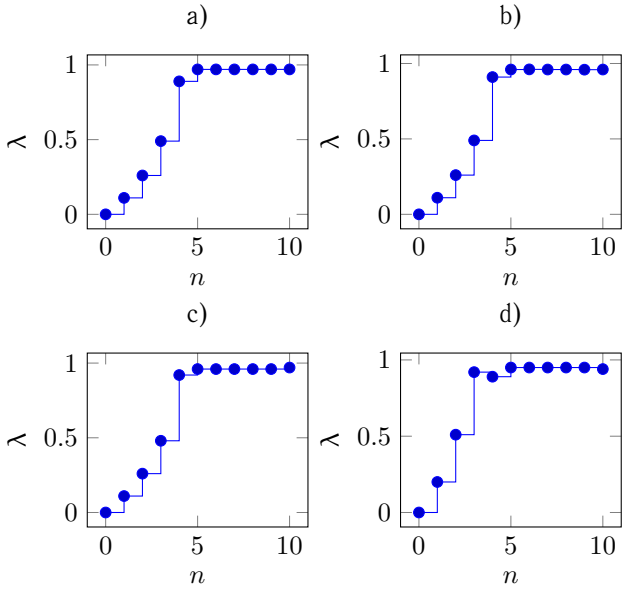

Рисунок 1.38 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 3$ a). $n^* = 5$; при $N = 1$ и $R^iN = R^iR^j = 10$, $i, j = 1, 2$, $K = [1, 5]$.
a) $R^1 = 0.3; R^2 = 0.3$;b) $R^1 = 0.3; R^2 = 0.6$;
c) $R^1 = 0.3; R^2 = 0.9$; d) $R^1 = 0.6; R^2 = 0.3$

- В условиях неопределенности

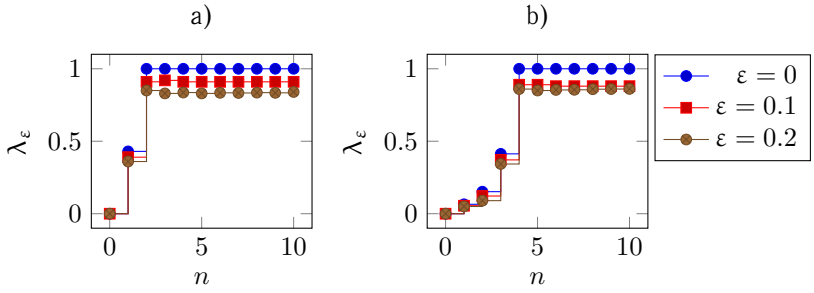

Рисунок 1.39 — График зависимости λ_ε от числа уровней n при $m = 3$:
a) $N = R^1 = R^2 = 1$, $R^iN = R^iR^j = 10$, $i, j = 1, 2$, $K = \{1\}$, $n^* = 2$; b) $N = R^1 = R^2 = 1$, $R^iN = R^iR^j = 100$, $i, j = 1, 2$, $K = \{1\}$, $n^* = 4$

- В условиях определенности. Обозначим $\lambda = \frac{N_b}{N + \sum_{i=1}^{m-1} R^i}$. Внешними параметрами задачи (1.29)являются исходные межфакторные пропорции $N : R^i N : R^j N$ $(i, j = \overline{1, m-1})$ и пропорции технологических коэффициентов $a_k^l : a_k^d$ $(k = \overline{1, n},\ d, l = \overline{0, m-1})$.

  Результаты решения задачи (1.29) для некоторых значений переменных N, $R^i N$ $(i = \overline{1, m-1})$ и параметров a_k^l принимающих случайные значения из отрезка $K \subset R^+$ представлены на рис. 1.40-1.41.

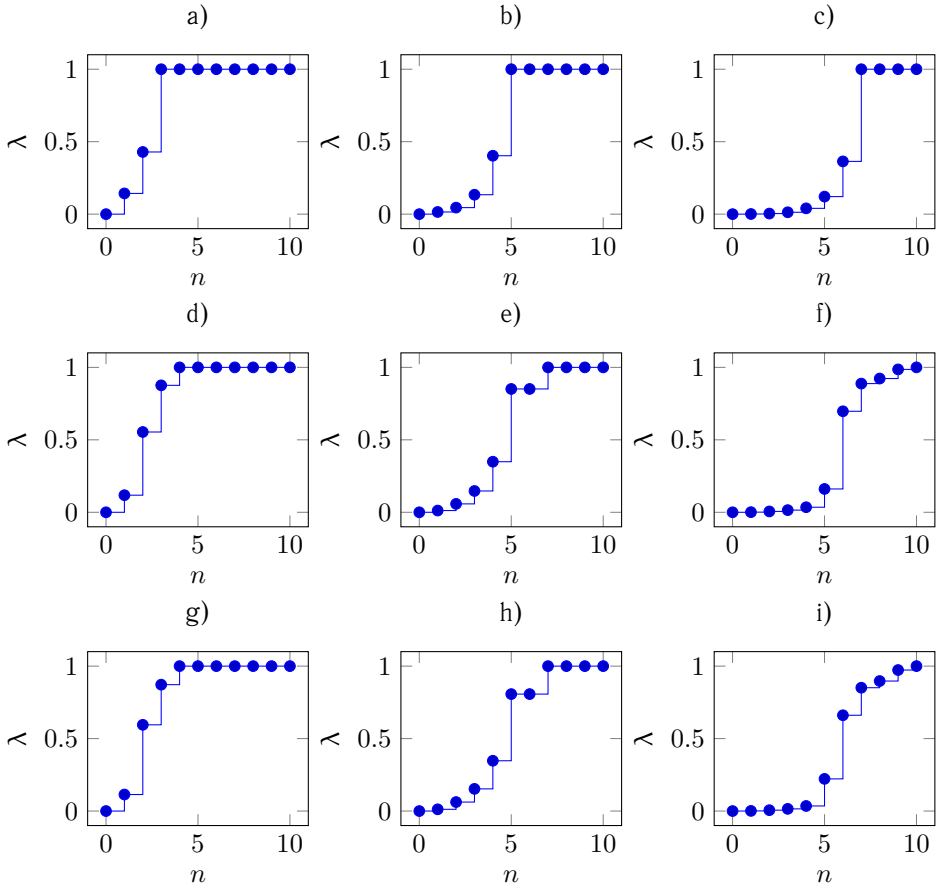

Рисунок 1.40 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 3$:
a) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 3$; b) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 5$;
c) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 7$; d) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 4$;
e) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 7$; f) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 10$;
g) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 4$; h) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 7$;
i) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 10]$; $n^* = 10$

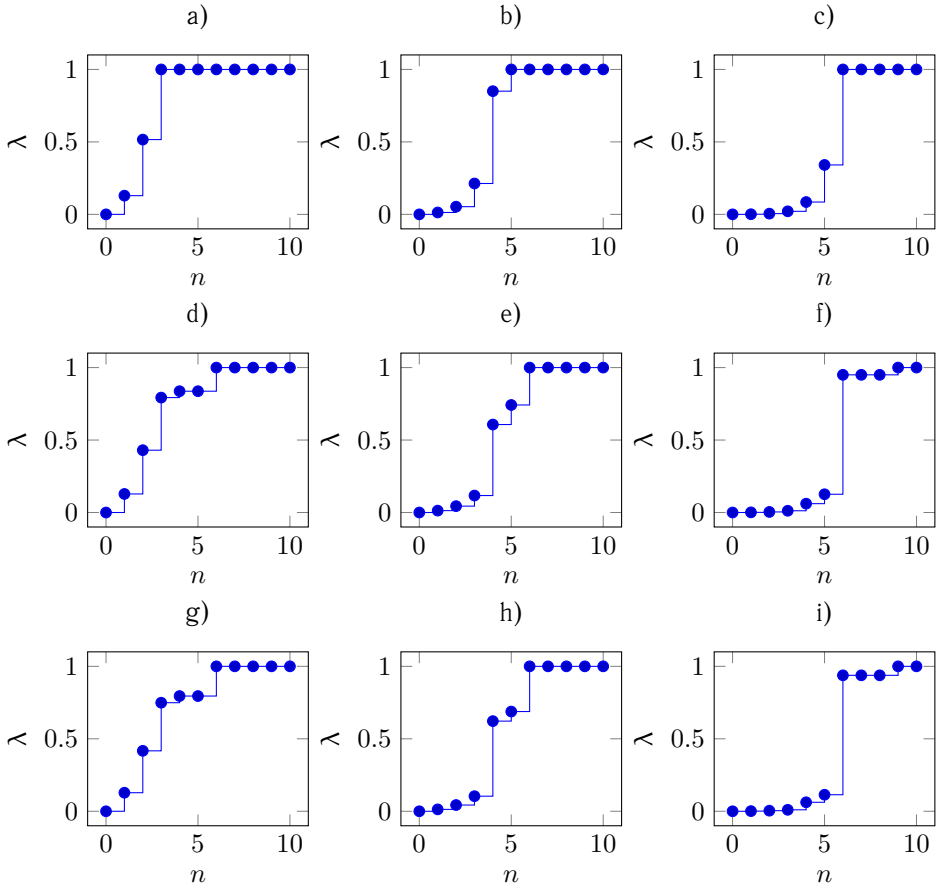

Рисунок 1.41 — График зависимости λ от числа уровней n при $m = 4$:
a) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = \{1\}$, $n^* = 3$;
b) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = \{1\}$, $n^* = 5$;
c) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = \{1\}$, $n^* = 6$;
d) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 5]$, $n^* = 6$;
e) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 5]$, $n^* = 6$;
f) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 5]$, $n^* = 9$;
g) $N = 0.1$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 10]$, $n^* = 6$;
h) $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 10]$, $n^* = 6$;
i) $N = 0.001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $R^3 = 1$; $K = [1, 10]$, $n^* = 9$

На рис.1.42 приведены некоторые решения задачи (1.29): графики изменения λ при $N \in [0,1]$, $R^1 \in [0,1]$ с шагом $\Delta = 0.1$ и при некоторых значения параметра n.

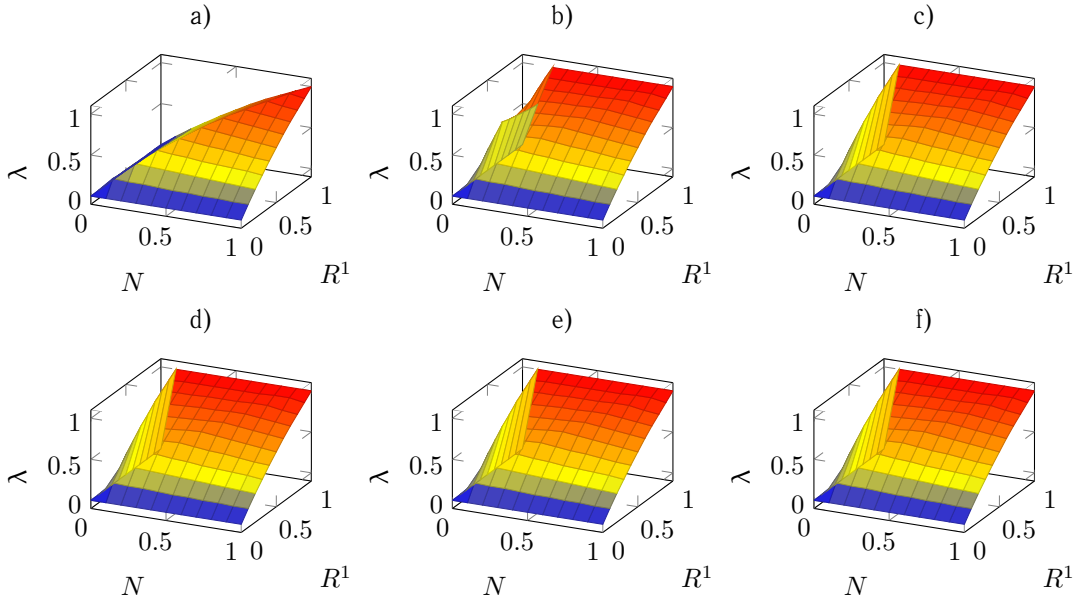

Рисунок 1.42 — График λ при $K = \{1\}$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 50$; f) $n = 100$

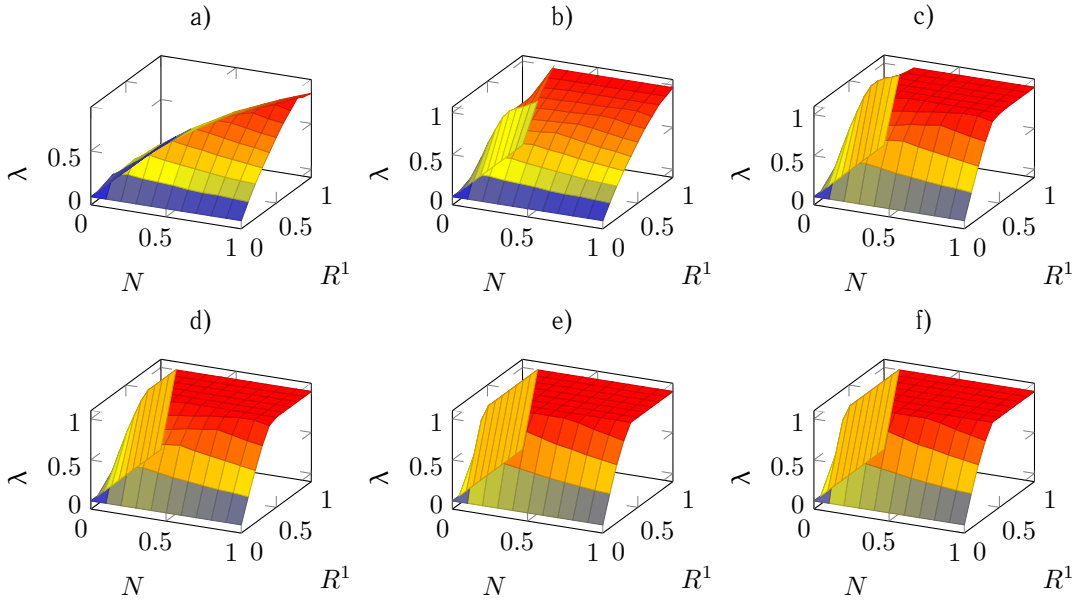

Рисунок 1.43 — График λ при $K = [1,5]$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 50$; f) $n = 100$

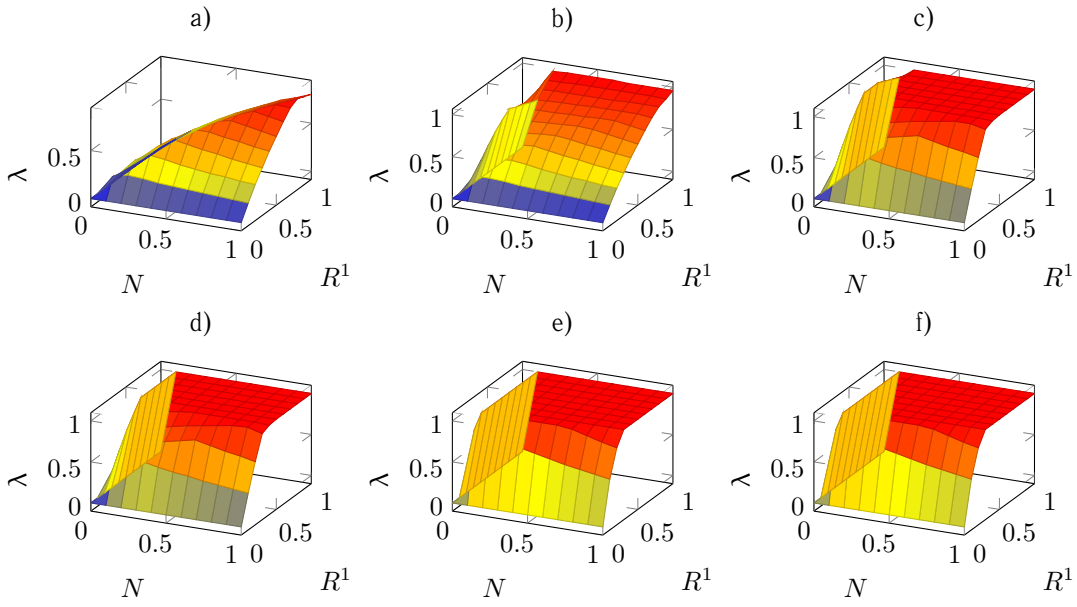

Рисунок 1.44 — График λ при $K = [1, 10]$. a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$; e) $n = 50$; f) $n = 100$

- В условиях неопределенности. Обозначим $\lambda_\varepsilon = \frac{N_{b\varepsilon}}{N + \sum_{i=1}^{m-1} R^i}$. Результаты решения задачи (1.30)-(1.32) для некоторых значений переменных N, $R^i N$ ($i = \overline{1, m-1}$), параметров a_k^l, принимающих случайные значения из отрезка $K \subset R^+$, и некоторых значений параметра $\varepsilon = \varepsilon_j$ ($j = \overline{1, n}$) представлены на рис.1.45.

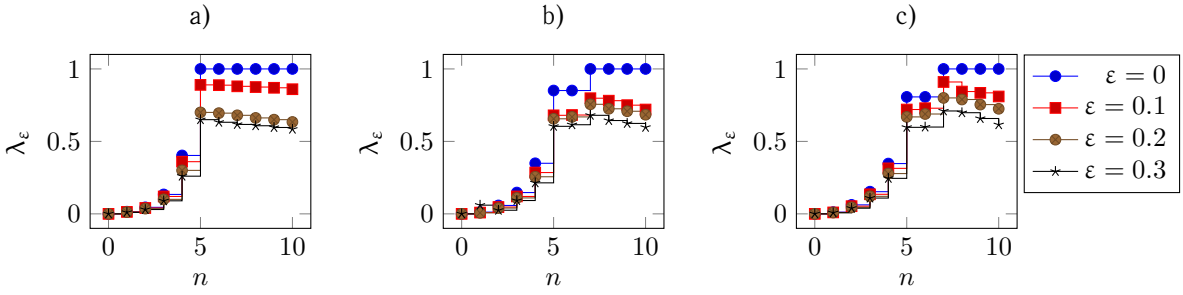

Рисунок 1.45 — График зависимости λ_ε от числа уровней n при $m = 3$, $N = 0.01$, $R^1 = 1$, $R^2 = 1$: a) $K = \{1\}$; b) $K = [1, 5]$; c) $K = [1, 10]$

1.4 Аналитические оценки эффективности оптимальных иерархических структур производственных подсистем предприятий

В некоторой области значений внешних параметров задачи оптимизационной задачи (1.17) получены аналитические оценки эффективности оптимальных иерархических структур производственных подсистем предприятий, оформленные в виде утверждений.

1.4.1 Структура сложного преобразователя

Утверждение 5. *Для СП с технологическими коэффициентами* a_i^j, A^j, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,m-1}$, *и пропорциями между входами*

$$\frac{N}{R^i N} = x, \quad \frac{R^j N}{R^i N} = 1, \quad x < 1, \quad i,j = \overline{1,m-1},$$

решение оптимизационной задачи (1.17) имеет следующую оценку сверху:

$$F_m(n,x) \le \begin{cases} \frac{S_A}{A^0} \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{S_{a_j}}{a_j^0} x, n \le n^* \\ x + m - 1, n > n^* \end{cases},$$

где $n^* \in \left(\left\lfloor \frac{\ln(\frac{A^0(x+m-1)}{S_A x})}{\ln(\max\limits_{j=\overline{1,n}} \frac{S_{a_j}}{a_j^0})} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{\ln(\frac{A^0(x+m-1)}{S_A x})}{\ln(\min\limits_{j=\overline{1,n}} \frac{S_{a_j}}{a_j^0})} \right\rfloor + 1 \right)$.

Доказательство.

$$N_1^0 + N_2^0 + \ldots + N_n^0 + N_F^0 = x \le 1; \qquad \sum_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m-1}} R_i^j N = 1;$$

Здесь и далее полагаем, что $f_k = N_{k+1}^k$. Выразим f_k

$$f_1 = S_{a_1} \min\left(\frac{N_1^0}{a_1^0}, \frac{R_1^1 N}{a_1^1}, \ldots, \frac{R_1^{m-1} N}{a_1^{m-1}}\right) - \sum_{i=3}^{n} N_i^1;$$

$$f_k = S_{a_k} \min\left(\frac{1}{a_k^0}(f_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} N_k^i), \frac{R_k^1 N}{a_k^1}, \ldots, \frac{R_k^{m-1} N}{a_k^{m-1}}\right) - \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k, k = \overline{2, n-2};$$

$$f_{n-2} = S_{a_{n-2}} \min\left(\frac{1}{a_{n-2}^0}(f_{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} N_{n-2}^i), \frac{R_{n-2}^1 N}{a_{n-2}^1}, \ldots, \frac{R_{n-2}^{m-1} N}{a_{n-2}^{m-1}}\right) - N_n^{n-2};$$

$$f_{n-1} = S_{a_{n-1}} \min\left(\frac{1}{a_{n-1}^0}(f_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} N_{n-1}^i), \frac{R_{n-1}^1 N}{a_{n-1}^1}, \ldots, \frac{R_{n-1}^{m-1} N}{a_{n-1}^{m-1}}\right);$$

$$f_n = S_{a_n} \min\left(\frac{1}{a_n^0}(f_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} N_n^i), \frac{R_n^1 N}{a_n^1}, \ldots, \frac{R_n^{m-1} N}{a_n^{m-1}}\right);$$

$$F_m(n, x) = S_A \min\left(\frac{f_n + N_F^0}{A^0}, \frac{R_F^1 N}{A^1}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{A^{m-1}}\right)$$

$$F_m(n, x) = S_A \min\left(\frac{f_n + N_F^0}{A^0}, \frac{R_F^1 N}{A^1}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{A^{m-1}}\right) = \frac{S_A}{A^0}\left(f_n + N_F^0\right) =$$

$$= \frac{S_A}{A^0}\left(S_{a_n} \min\left(\frac{1}{a_{n-1}^0}(f_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} N_n^i), \frac{R_n^1 N}{a_n^1}, \ldots, \frac{R_n^{m-1} N}{a_n^{m-1}}\right) + N_F^0\right) =$$

$$= \frac{S_A}{A^0}\left(\frac{S_{a_n}}{a_n^0} f_{n-1} + \frac{S_{a_n}}{a_n^0} \sum_{i=0}^{n-2} N_n^i + N_F^0\right) =$$

$$= \frac{S_A}{A^0}\left(\frac{S_{a_n}}{a_n^0} S_{a_{n-1}} \min\left(\frac{1}{a_{n-1}^0}(f_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} N_{n-1}^i), \frac{R_{n-1}^1 N}{a_{n-1}^1}, \ldots, \frac{R_{n-1}^{m-1} N}{a_{n-1}^{m-1}}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{S_{a_n}}{a_n^0} \sum_{i=0}^{n-2} N_n^i + N_F^0\right) = \frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-1}^{n} \frac{S_{a_j}}{a_j^0}\left(f_{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} N_{n-1}^i\right) +\right.$$

$$+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\Bigg)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}f_{n-2}+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\right.$$

$$\left.+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\left(S_{a_{n-2}}\min\left(\frac{f_{n-3}+\sum\limits_{i=0}^{n-4}N_{n-2}^i}{a_{n-2}^0},\frac{R_{n-2}^1N}{a_{n-2}^1},\ldots,\frac{R_{n-2}^{m-1}N}{a_{n-2}^{m-1}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-N_n^{n-2}\right)+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\Bigg(\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\left(\frac{S_{a_{n-2}}}{a_{n-2}^0}f_{n-3}+\sum_{i=0}^{n-4}N_{n-2}^i-N_n^{n-2}\right)+$$

$$+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\frac{S_{a_{n-1}}}{a_{n-1}^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\Bigg)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}f_{n-3}-\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_n^{n-2}+\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-4}N_{n-2}^i+\right.$$

$$\left.+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\right)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\times\right.$$

$$\times\left(S_{a_{n-3}}\min\left(\frac{1}{a_{n-3}^0}(f_{n-4}+\sum_{i=0}^{n-5}N_{n-3}^i),\frac{R_{n-3}^1N}{a_{n-3}^1},\ldots,\frac{R_{n-3}^{m-1}N}{a_{n-3}^{m-1}}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=n-1}^{n}N_i^{n-3}\right)-\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_n^{n-2}+\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-4}N_{n-2}^i+$$

$$+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\Bigg)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\left(\frac{S_{a_{n-3}}}{a_{n-3}^0}(f_{n-4}+\sum_{i=0}^{n-5}N_{n-3}^i)-\sum_{i=n-1}^{n}N_i^{n-3}\right)-\right.$$

$$\left.-\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_n^{n-2}+\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-4}N_{n-2}^i+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\right.$$

$$+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\Bigg)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}f_{n-4}-\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=n-1}^{n}N_i^{n-3}-\right.$$

$$-\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_n^{n-2}+\prod_{j=n-3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-5}N_{n-3}^i+\prod_{j=n-2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-4}N_{n-2}^i+$$

$$\left.+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{n-3}N_{n-1}^i+\frac{S_{a_n}}{a_n^0}\sum_{i=0}^{n-2}N_n^i+N_F^0\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=n-3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}f_{n-4}-\sum_{k=n-2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n-3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i+N_F^0\right)=\ldots=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}f_2-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=4}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i+N_F^0\right)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}f_1-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=3}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i+N_F^0\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}(\prod_{j=2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\left(S_{a_1}\min\left(\frac{N_1^0}{a_1^0},\frac{R_1^1N}{a_1^1},\ldots,\frac{R_1^{m-1}N}{a_1^{m-1}}\right)-\sum_{i=3}^{n}N_i^1\right)-$$

$$-\sum_{k=3}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i+N_F^0)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_1^0-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i+N_F^0\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(x-\sum_{i=2}^{n}N_i^0-N_F^0)-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i+N_F^0\right)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(x-\sum_{i=2}^{n}N_i^0)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i\underbrace{-(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}-1)N_F^0}_{\leq 0}\right)\leq$$

$$\leq \frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(x-\sum_{i=2}^{n}N_i^0)-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i\right)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x-\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=2}^{n}N_i^0-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=0}^{k-2}N_k^i\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x-\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=2}^{n}N_i^0-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{k-2}N_k^i+\sum_{k=2}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_k^0\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x-\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=2}^{n}N_i^0-\sum_{k=2}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_k^0\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{k-2}N_k^i\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x\underbrace{-\sum_{k=2}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}-\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\right)N_k^0}_{\leq 0}-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+$$

$$+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{k-2}N_k^i)\leq$$

$$\leq\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x-\sum_{k=2}^{n-1}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=k+1}^{n}N_i^{k-1}+\sum_{k=3}^{n}\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{k-2}N_k^i\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x-\left(\prod_{j=2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=3}^{n}N_i^1+\prod_{j=3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=4}^{n}N_i^2+\dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=n}^{n}N_i^{n-2}\right)+\left(\prod_{j=3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{1}N_3^i+\prod_{j=4}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{2}N_4^i+\dots\right.\right.$$

$$+\ldots\prod_{j=n}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\sum_{i=1}^{n-2}N_n^i\Bigg)=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x-\left(\prod_{j=2}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(N_3^1+\ldots+N_n^1)+\right.\right.$$

$$+\prod_{j=3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(N_4^2+\ldots+N_n^2)+\ldots+\prod_{j=n-1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_n^{n-2}\Bigg)+$$

$$\left.+\prod_{j=3}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}N_3^1+\prod_{j=4}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(N_4^1+N_4^2)+\ldots+\prod_{j=n}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}(N_n^1+\ldots+N_n^{n-2})\right)=$$

$$=\frac{S_A}{A^0}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x\underbrace{-\sum_{l=2}^{n}\sum_{k=3}^{n}\left(\prod_{j=l}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}-\prod_{j=k}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\right)N_k^{i-1}}_{\leq 0}\right)\leq\frac{S_A}{A^0}\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x.$$

Докажем, что $F_m(n,x)\leq x+m-1$ при $n>n^*$.

Так как значение ПФ Леонтьева не превосходит суммы своих аргументов, то есть $F_m(n,x)\leq m-1+x$, то оценку $F_m(n,x)\leq\frac{S_A}{A^0}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x$ можно использовать для тех значений n^*, при которых выполнено неравенство

$$\frac{S_A}{A^0}\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}x\leq m-1+x.$$

Очевидно, что

$$\left(\min_{j=\overline{1,n}}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\right)^n\leq\prod_{j=1}^{n}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\leq\left(\max_{j=\overline{1,n}}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\right)^n.$$

Пусть n^*_{min} — предельное значение n, для которого выполнено неравенство

$$\frac{S_A}{A^0}\left(\min_{j=\overline{1,n}}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\right)^n x\leq m-1+x.$$

Решив его, получаем $n^*_{min}=\frac{\ln(\frac{A^0(x+m-1)}{S_Ax})}{\ln(\min\limits_{j=\overline{1,n}}\frac{S_{a_j}}{a_j^0})}$.

Пусть n^*_{max} — предельное значение n, для которого выполнено неравенство

$$\frac{S_A}{A^0}\left(\max_{j=\overline{1,n}}\frac{S_{a_j}}{a_j^0}\right)^n x\leq m-1+x.$$

Решив его, получаем $n^*_{max} = \frac{\ln(\frac{A^0(x+m-1)}{S_A x})}{\ln(\max\limits_{j=\overline{1,n}} \frac{S_{a_j}}{a^0_j})}$.

Т.к. $n^*_{min} \geq n^*_{max}$, то $n^* \in (n^*_{max}, n^*_{min})$, но так как $n^* \in N$ — целое, то $n^* \in (\lfloor n^*_{max} \rfloor + 1, \lfloor n^*_{min} \rfloor + 1)$.

Утверждение доказано.

Замечание. Результаты утверждения 5 показывают, что оптимальная структура зависит не только от межфакторных диспропорций, но и от технологических коэффициентов, а именно от величины $\Delta = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \frac{S_{a_j}}{a^0_j} - \min\limits_{j=\overline{1,n}} \frac{S_{a_j}}{a^0_j}$.

Замечание. В утверждении 5 при $n \leq n^*$ верхняя оценка достижима.

На рис. 1.47 показаны результаты численного решения задачи (1.17) и аналитические оценки ее решения согласно утверждению 3.

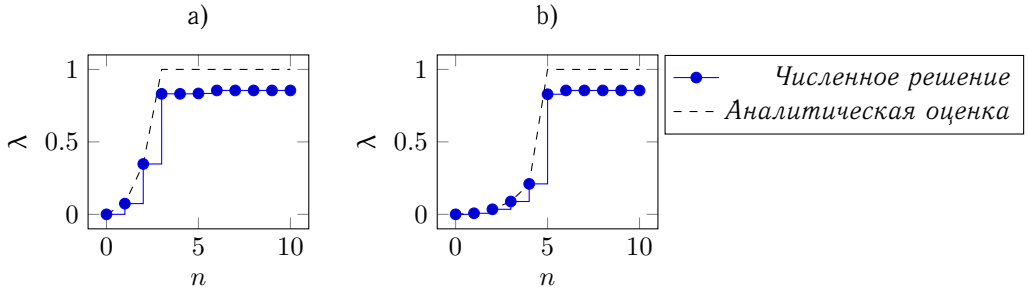

Рисунок 1.46 — Графики решения задачи (1.17) различными способами:
a) $m = 3$; $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 4$;
b) $m = 3$; $N = 0.0001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = [1, 5]$; $n^* = 8$

Следствие 3. *Для СП с технологическими коэффициентами* $a^j_i = A^j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0, m-1}$, *и пропорциями между входами*

$$\frac{N}{R^i N} = x, \quad \frac{R^j N}{R^i N} = 1, \quad x < 1, \quad i, j = \overline{1, m-1}$$

решение оптимизационной задачи (1.17) имеет следующую оценку сверху:

$$F_m(n, x) \leq \begin{cases} m^{n+1}x, n \leq n^* \\ x + m - 1, n > n^* \end{cases},$$

где $n^* = \lfloor \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} \rfloor$.

Доказательство. Сначала докажем $m^{n+1}x, n \leq n^*$.

$$N_1^0 + N_2^0 + \ldots + N_n^0 + N_F^0 = x \leq 1; \qquad \sum_{i=\overline{1,n},j=\overline{1,m-1}} R_i^j N = 1;$$

$$N_2^1 + N_3^1 + \ldots + N_n^1 = m \min\left(N_1^0, R_1^1, \ldots, R_1^{m-1}\right)$$

Здесь и далее полагаем, что $f_k = N_{k+1}^k$. Выразим f_k

$$f_1 = m \min\left(N_1^0, R_1^1, \ldots, R_1^{m-1}\right) - \sum_{i=3}^{n} N_i^1;$$

$$N_3^2 + N_4^2 + \ldots + N_n^2 = m \min\left(f_1 + N_2^0, R_2^1, \ldots, R_2^{m-1}\right),$$

$$f_2 = m \min\left(f_1 + N_2^0, R_2^1, \ldots, R_2^{m-1}\right) - \sum_{i=4}^{n} N_i^2;$$

$$N_4^3 + N_5^3 + \ldots + N_n^3 = m \min\left(f_2 + N_2^0 + N_3^1, R_3^1, \ldots, R_3^{m-1}\right),$$

$$f_3 = m \min\left(f_2 + N_2^0 + N_3^1, R_3^1, \ldots, R_3^{m-1}\right) - \sum_{i=5}^{n} N_i^3;$$

$$N_5^4 + N_6^4 + \ldots + N_n^4 = m \min\left(f_3 + N_4^0 + N_2^1 + N_4^2, R_4^1, \ldots, R_4^{m-1}\right),$$

$$f_4 = m \min\left(f_3 + N_4^0 + N_2^1 + N_4^2, R_4^1, \ldots, R_4^{m-1}\right) - \sum_{i=6}^{n} N_i^4;$$

$$N_{k+1}^k + N_{k+2}^k + \ldots + N_n^k = m \min\left(f_{k-1} + N_k^0 + \sum_{i=1}^{k-2} N_k^i, R_k^1, \ldots, R_k^{m-1}\right),$$

$$f_k = m \min\left(f_{k-1} + N_k^0 + \sum_{i=1}^{k-2} N_k^i, R_k^1, \ldots, R_k^{m-1}\right) - \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k;$$

$$k = \overline{2, n-2};$$

$$N_F^n = f_n = m \min \left(f_{n-1} + N_n^0 + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i, R_n^1, \ldots, R_n^{m-1} \right);$$

$$F = m \min \left(f_n + N_F^0, R_F^1, \ldots, R_F^{m-1} \right) = m \left(f_n + N_F^0 \right) =$$

$$= m^2 \left(f_{n-1} + N_n^0 + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i, R_n^1, \ldots, R_n^{m-1} \right) + mN_F^0 =$$

$$= m^2 \left(f_{n-1} + N_n^0 + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i \right) + mN_F^0 = m^2 f_{n-1} + m^2 N_n^0 + m^2 \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i + mN_F^0 =$$

$$= m^3 \min \left(f_{n-2} + N_{n-1}^0 + \sum_{i=1}^{n-3} N_{n-1}^i, R_{n-1}^1 N, \ldots, R_{n-1}^{m-1} N \right) +$$

$$+ m^2 N_n^0 + m^2 \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i + mN_F^0 =$$

$$= m^3 f_{n-2} + m^3 N_{n-1}^0 + m^3 \sum_{i=1}^{n-3} N_{n-1}^i + m^2 N_n^0 + m^2 \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i + mN_F^0 =$$

$$= m^3 (m \min \left(f_{n-3} + N_{n-2}^0 + \sum_{i=1}^{n-4} N_{n-2}^i, R_{n-2}^1 N, \ldots, R_{n-2}^{m-1} N \right) -$$

$$- \sum_{i=n}^{n} N_i^{n-2}) + m^3 N_{n-1}^0 + m^3 \sum_{i=1}^{n-3} N_{n-1}^i + m^2 N_n^0 + m^2 \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i + mN_F^0 =$$

$$= m^4 f_{n-3} + m^4 N_{n-2}^0 + m^4 \sum_{i=1}^{n-4} N_{n-2}^i - m^3 \sum_{i=n}^{n} N_i^{n-2} +$$

$$+ m^3 (N_{n-1}^0 + \sum_{i=1}^{n-3} N_{n-1}^i) + m^2 (N_n^0 + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i) + mN_F^0 =$$

$$= m^4 f_{n-3} - m^3 \sum_{i=n}^{n} N_i^{n-2} + m^4 (N_{n-2}^0 + \sum_{i=1}^{n-4} N_{n-2}^i) +$$

$$+ m^3 (N_{n-1}^0 + \sum_{i=1}^{n-3} N_{n-1}^i) + m^2 (N_n^0 + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i) + mN_F^0 =$$

$$= m^4 (m \min \left(f_{n-4} + N_{n-3}^0 + \sum_{i=1}^{n-5} N_{n-3}^i, R_{n-3}^1 N, \ldots, R_{n-3}^{m-1} N \right) -$$

$$- \sum_{i=n-1}^{n} N_i^{n-3}) - m^3 \sum_{i=n}^{n} N_i^{n-2} + m^4 (N_{n-2}^0 + \sum_{i=1}^{n-4} N_{n-2}^i) +$$

$$+ m^3 (N_{n-1}^0 + \sum_{i=1}^{n-3} N_{n-1}^i) + m^2 (N_n^0 + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i) + m N_F^0 = \dots$$

$$\dots = m^{n+1} N_1^0 - \sum_{k=1}^{n-2} m^{n-k+1} \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k + \sum_{j=2}^{n} m^j (N_{n-j+2}^0 + \sum_{i=1}^{n-j} N_{n-j+2}^i) +$$

$$+ m N_F^0 = m^{n+1} (x - \sum_{i=2}^{n} N_i^0 - N_F^0) - \sum_{k=1}^{n-2} m^{n-k+1} \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} m^j (N_{n-j+2}^0 + \sum_{i=1}^{n-j} N_{n-j+2}^i) + m N_F^0 =$$

$$= m^{n+1} x - m^{n+1} \sum_{i=2}^{n} N_i^0 - \sum_{k=1}^{n-2} m^{n-k+1} \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} m^j (N_{n-j+2}^0 + \sum_{i=1}^{n-j} N_{n-j+2}^i) - (m^{n+1} - m) N_F^0 =$$

$$= m^{n+1} x - m^{n+1} (N_2^0 + N_3^0 + \dots + N_n^0) + (m^2 N_n^0 + m^3 N_{n-1}^0 + \dots + m^n N_2^0) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} m^j \sum_{i=1}^{n-j} N_{n-j+2}^i - \sum_{k=1}^{n-2} m^{n-k+1} \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k - (m^{n+1} - m) N_F^0 =$$

$$= m^{n+1} x - \sum_{i=0}^{n-2} (m^{n+1} - m^{n-i}) N_{i+2}^0 - (m^{n+1} - m) N_F^0 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} m^j \sum_{i=1}^{n-j} N_{n-j+2}^i - \sum_{k=1}^{n-2} m^{n-k+1} \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k \leq$$

$$\leq m^{n+1} x + \sum_{j=2}^{n} m^j \sum_{i=1}^{n-j} N_{n-j+2}^i - \sum_{k=1}^{n-2} m^{n-k+1} \sum_{i=k+2}^{n} N_i^k =$$

$$= m^{n+1} x + m^2 (N_n^1 + N_n^2 + \dots + N_n^{n-2}) + m^3 (N_{n-1}^1 + N_{n-1}^2 + \dots + N_{n-1}^{n-3}) +$$

$$+ m^4 (N_{n-2}^1 + N_{n-2}^2 + \dots + N_{n-2}^{n-4}) + \dots + m^{n-1} N_3^1 -$$

$$- m^n (N_3^1 + N_4^1 + \dots + N_n^1) - m^{n-1} (N_4^2 + N_5^2 + \dots + N_n^2) - \dots$$

$$\dots - -m^3 N_n^{n-2} = m^{n+1} x - (m^n - m^2) N_n^1 - (m^n - m^3) N_{n-2}^1 - \dots$$

$$\dots - (m^n - m^{n-1}) N_3^1 - (m^{n-1} - m^2) N_n^2 - (m^{n-1} - m^3) N_{n-1}^2 - \dots$$

$$\dots - (m^{n-1} - m^{n-3}) N_4^2 - \dots (m^3 - m^2) N_n^{n-2} \leq m^{n+1} x.$$

Докажем, что $F_m(n,x) \le x + m - 1$ при $n > n^*$.

Так как значение ПФ Леонтьева не превосходит суммы своих аргументов, то есть $F_m(n,x) \le m - 1 + x$, то оценку $F_m(n,x) \le m^{n+1}x$ можно использовать для тех значений n^*, при которых выполнено неравенство

$$m^{n+1}x \le m - 1 + x.$$

Пусть n^* — предельное значение n, для которого выполнено данное неравенство. Решив его, получаем $n^* = \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} - 1$, но так как n^* — целое, то

$$n^* = \lfloor \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} \rfloor.$$

Утверждение доказано.

На рис. 1.47 показаны результаты численного решения задачи (1.17) и аналитические оценки ее решения согласно утверждению 3.

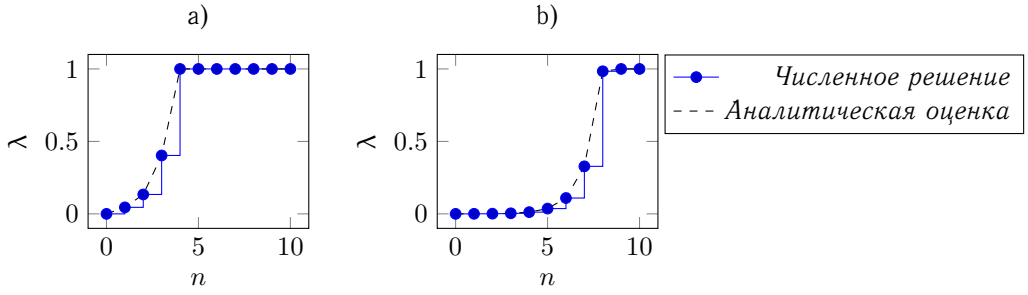

Рисунок 1.47 — Графики решения задачи (1.17) различными способами:
a) $m = 3$; $N = 0.01$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 4$;
b) $m = 3$; $N = 0.0001$; $R^1 = 1$; $R^2 = 1$; $K = \{1\}$; $n^* = 8$

Утверждение 6. *Для СП(*) с технологическими коэффициентами удовлетворяющими условиям:*

$$\frac{A^l}{A^j} < \Delta, \frac{a_i^l}{a_i^j} < \Delta_i, i = \overline{1,n}, j = \overline{0,m-1}$$

и пропорциями между входами

$$\frac{N}{R^i N} = x, \quad \frac{R^j N}{R^i N} = 1, \quad x < 1, \quad i,j = \overline{1,m-1}$$

решение оптимизационной задачи (1.17) имеет следующую оценку снизу:

$$F_m(n,x) > \frac{m^{n+1}}{\Delta \prod\limits_{i=1}^{n} \Delta_i}, n < n^*.$$

Доказательство.

$$F_m(x,n) = S \min\left(\frac{f_n}{A^0}, \frac{R_F^1 N}{A^1}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{A^{m-1}}\right) >$$

$$> S \min\left(\frac{f_n}{\max\limits_{j=0,m-1} A^j}, \frac{R_F^1 N}{\max\limits_{j=0,m-1} A^j}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{\max\limits_{j=0,m-1} A^j}\right) =$$

$$= S \min\left(\frac{f_n}{\Delta \min\limits_{j=0,m-1} A^j}, \frac{R_F^1 N}{\Delta \min\limits_{j=0,m-1} A^j}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{\Delta \min\limits_{j=0,m-1} A^j}\right) =$$

$$= \frac{S}{\Delta \min\limits_{j=0,m-1} A^j} \min\left(f_n, R_F^1 N, \ldots, R_F^{m-1} N\right) >$$

$$> \frac{m}{\Delta} \min\left(f_n, R_F^1 N, \ldots, R_F^{m-1} N\right) > \frac{m^2}{\Delta \Delta_i} \min\left(f_{n-1}, R_n^1 N, \ldots, R_F^{m-1} n\right) > \ldots$$

$$\ldots > \frac{m^n}{\Delta \prod\limits_{i=2}^{n} \Delta_i} \min\left(f_1, R_1^1 N, \ldots, R_1^{m-1} N\right) > \frac{m^{n+1}}{\Delta \prod\limits_{i=1}^{n} \Delta_i}.$$

Утверждение 7. *СП с технологическими коэффициентами $a_i^j = A^j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,m-1}$, и пропорциями между входами*

$$\frac{R^i N}{N} = x, \quad \frac{R^j N}{R^i N} = 1, \quad x < 1, \quad i,j = \overline{1,m-1} \tag{1.33}$$

решение оптимизационной задачи (1.17) имеет вид:

$$F_m(x,n) = mx.$$

Доказательство. Так как $\frac{R^i N}{N} = x < 1$, то

$$f_1 = m \min\left(N_1^0, R_1^1 N, \ldots, R_1^p N\right) = 0,$$
$$f_2 = m \min\left(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, \ldots, R_2^p N\right) = 0,$$
$$f_k = m \min\left(f_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} N_k^i + N_k^0, R_k^1 N, \ldots, R_k^p N\right) = 0, k = \overline{3, n}$$

Так как $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_k = 0$, то F имеет вид:

$$F = m \min\left(N_F^0, R_F^1 N, \ldots, R_F^p N\right).$$

Учитывая (1.33) получаем $F = m \min(1, x, \ldots, x) = mx$.

1.4.2 Структура комплексного преобразователя

Следствие 4. *Для КП с равными технологическими коэффициентами и пропорциями между входами*

$$\frac{N}{R^i N} = x_0, \quad \frac{R^j N}{R^i N} = 1,$$
$$\frac{R^j}{R^i R^j} = x_j, \quad \frac{R^k R^j}{R^i R^j} = 1,$$
$$i, j, k = \overline{1, m-1}$$
$$\max_{j=\overline{0,m-1}} x_j < 1, n = n_N = n_{R^1} = \ldots = n_{R^{m-1}}$$

справедлива следующая верхняя оценка решения оптимизационной задачи (1.22):

$$F_m(n, x_{min}) \leq \begin{cases} m^{n+2} x_{min}, n \leq \lfloor \frac{\ln \frac{m x_{min} + m(m-1)}{x_{min}}}{\ln m} \rfloor - 1 \\ m x_{min} + m(m-1), n > \lfloor \frac{\ln \frac{m x_{min} + m(m-1)}{x_{min}}}{\ln m} \rfloor - 1 \end{cases},$$

где $x_{min} = \min\limits_{j=\overline{0,m-1}} x_j$.

Следствие 5. *Для КП с равными технологическими коэффициентами и про-*

порциями между входами

$$\frac{R^i N}{N} = x, \quad \frac{R^j N}{R^i N} = 1,$$
$$\frac{R^i R^j}{R_j} = x, \quad \frac{R^k R^j}{R^i R^j} = 1,$$
$$i, j, k = \overline{1, m-1}$$
$$x < 1, n = n_N = n_{R_1} = \ldots = n_{R^{m-1}}$$

решение оптимизационной задачи (1.22) имеет вид:

$$F_m(x, n) = m^2 x.$$

1.5 Выводы

Результаты численного исследования модели оптимизации симметричных иерархических структур производственных подсистем предприятия про показали, что

1. значительные запасы факторов во вспомогательных производствах и достаточно большое число ПП во всех линиях СП позволяет достичь устойчивого максимума ПФ при значительных отклонениях пропорций факторов базового производства от оптимальных и разбросах технологических коэффициентах вспомогательных производств.
2. увеличение разброса технологических коэффициентов вспомогательных производств при больших запасах факторов компенсируется ростом числа слоев ПП.
3. уменьшение запасов факторов и числа ПП вспомогательных производств резко снижает устойчивость выпуска при отклонении пропорций факторов базового производства от идеальных.

Глава 2. Оптимальное управление иерархической структурой производственной подсистемы предприятия со структурно зависимой производственной функцией леонтьевского типа

2.1 Формализация и постановка задачи оптимального управления

Задачи оптимизации иерархических структур производственных подсистем предприятий (1.8), (1.17), (1.22), (1.29) являются составной частью задачи оптимального управления иерархической структурой производственных подсистем предприятий.

Задача оптимального управления иерархической структурой производственной подсистемой предприятия при заданных временных рядах значений факторов производства, заключающаяся в поиске оптимального временного ряда иерархической структурой производственной подсистемой предприятия $n(t)$, максимизирующей целевую функцию предприятия (здесь — прибыль предприятия). Приведем формальную постановку задачи.

Пусть $\Phi(n(t), R(t))$ — значение иерархической структуры производственной подсистемы предприятия в момент времени t при $n(t)$ и заданных значениях факторов производства $R(t) = \{R^i(t)\}_{i=1}^m$, $\gamma > 0$ — коэффициент добавленной стоимости. Введем функции затрат на управление и изменение иерархической структуры производственной подсистемы предприятия.

Определение 5. *Функцию $\Xi(n(t)) = \Xi(Q(n(t)), W(n(t)))$ назовем функцией затрат на управление иерархической структурой производственной подсистемой предприятия, где $Q(n(t)) \geq 0$ — число простых преобразователей (постоянные затраты), $W(n(t)) \geq 0$ — число ненулевых факторных потоков (переменные затраты) в $n(t)$-слойной иерархической структуре производственной подсистемой предприятия, $\Xi(Q(n(t)), W(n(t)))$ — возрастающая по обоим аргументам функция.*

Определение 6. *Функцию $U = U(\Delta n(t))$ назовем функцией затрат на изменение (перестроение) иерархической структуры производственной подсистемы предприятия, где $\Delta n(t) = |n(t+1) - n(t)|$, $U(\Delta n(t))$ — возрастающая функция.*

Исходное состояние иерархической структуры производственной подсистемы предприятия задается начальным условием

$$n(0) = n_0. \tag{2.1}$$

Уравнение процесса изменения иерархической структуры производственной подсистемы предприятия имеет вид:

$$n(t+1) = n(t) + u(t), \tag{2.2}$$

где $n(t)$ состояние структуры производственной подсистемы предприятия, а $u(t)$ — управление в момент времени t.

Задача оптимального управления иерархической структурой производственной подсистемы предприятия при $t = [0, T]$ заключается в поиске процесса $\left(\{n^*(t)\}_{t=1}^{T}, \{u^*(t)\}_{t=0}^{T-1}\right)$, максимизирующего функционал [58]:

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} J(n(t), t) + \hat{J}(n(T), T) \to \max_{u(t)},$$

$$J(n(t), t) = \gamma\Phi(n(t), R(t)) - U(\Delta n(t)) - \Xi(n(t)),$$

$$\hat{J}(n(T), T) = \gamma\Phi(n(T), R(T)) - \Xi(n(T)). \tag{2.3}$$

2.1.1 Алгоритм решения и параметризация задачи оптимального управления

Задача (2.1)-(2.3) решается методом динамического программирования [2; 5]. Уравнение Беллмана для задачи (2.1)-(2.3) имеет вид:

$$f(t) = \max_{u(t)} \left\{ J(t) + f(t-1) \right\}, t = \overline{1, T-1},$$

$$f(T) = \max_{u(t)} \left\{ \hat{J}(T) \right\}.$$

Введем величины $\xi = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ и $\eta = \dfrac{\beta}{\gamma}$ и два интегральных параметра решений задачи (2.3):

$$\mu = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} n^*(t), \quad \delta = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left| n^*(t+1) - n^*(t) \right|, \tag{2.4}$$

характеризующих соответственно среднюю сложность и среднюю изменчивость оптимальной иерархической структуры производственной подсистемы. Таким образом, каждой оптимальной траектории $n^*(t)$ можно поставить в соответствие векторный параметр $p = (\xi, \eta, \mu, \delta)$.

Анализ множества значений векторного параметра $p = (\xi, \eta, \mu, \delta)$ оптимальных траекторий $n^*(t)$ позволяет выделить на плоскости (ξ, η) зоны, отвечающие нескольким типовым динамическим режимам. Границы зон определяются параметрами (μ_0, δ_0) вырожденной задачи (2.3.0) (задача (2.3) при $\alpha = \beta = 0$, $\gamma > 0$). В качестве типовых режимов можно выделить следующие:

- Динамические режимы ($\delta > 0$):

  1. следящий динамический режим (режим, в котором оптимальная траектория $n^*(t)$ совпадает с соответствующей траекторией вырожденной задачи (2.3.0))

(I, $\mu = \mu_0, \delta = \delta_0$).

2. динамический режим с упрощенной иерархической структурой производственной подсистемы

   (II, $\mu < \mu_0, \delta \leq \delta_0$).

3. динамический режим с усложненной иерархической структурой производственной подсистемы

   (III, $\mu > \mu_0, \delta \leq \delta_0$).

- Стационарные режимы:

1. режим с простейшей иерархической структурой производственной подсистемы ($\delta = \frac{|n^*(1)-n^*(0)|}{T}$)

   (IV, $n(t_0) = n_0$, $n^*(t) = 1$, $\forall t > t_0$).

2. режим с начальной структурой иерархической структурой производственной подсистемы ($\delta = 0$)

   (V, $n^*(t) = n_0$).

2.2 Решение задачи оптимального управления многошаговым методом динамического программирования

Решение задачи оптимального управления иерархической структурой производственной подсистемы предприятия для разных типов структур незначительно отличаются друг от друга. Покажем результаты решения задачи оптимального управления для структуры комплексного преобразователя.

2.2.1 Комплексный преобразователь

Значение $\Phi(n(t))$ — значение ПФ иерархической структуры производственной подсистемы, определяется как решение оптимизационной задачи (1.22). Предположим для простоты, что функция затрат на перестроение иерархической структурой производственной подсистемы имеет следующий вид:

$$U(t) = \alpha \left(n(t+1) - n(t)\right)^2,$$

а функция затрат на управление иерархической структурой производственной подсистемы в момент времени t имеет вид:

$$\Xi(n(t)) = \beta \left(W(n(t)) + Q(n(t))\right).$$

Приведем пример решения задачи (2.1)-(2.3) при единичных технологических коэффициентах для $m = 4$, $T = 10$. Считаем, что факторы производства заданы временными рядами, представленными на рис. 2.1. Назовем этот пример задачей (2.3.a)

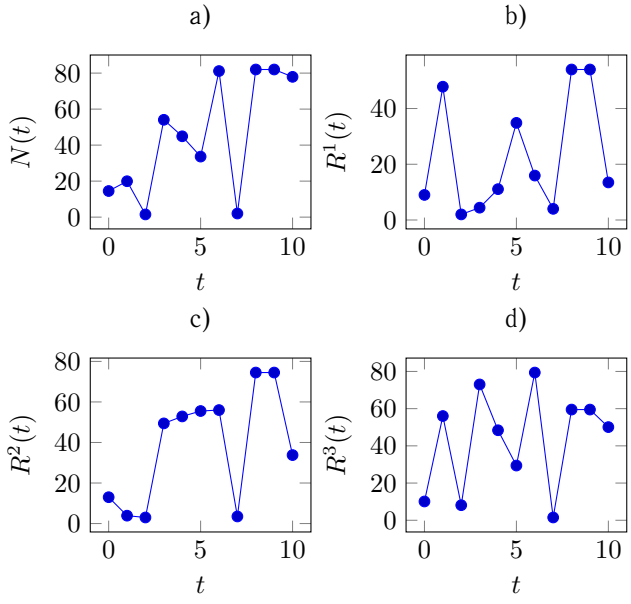

Рисунок 2.1 — Временной ряд факторов производства

При $\alpha = \beta = 0$ задача (2.3.a) распадается на независимые при каждом значении t задачи (1.22). Ее решение (вырожденная задача (2.3.a.0)), соответственно имеет вид: $n^*(t) = (2, 3, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 1, 1, 2)$ (рис. 2.2a)).

На рис. 2.2 приведены некоторые решения задачи (2.3.a).

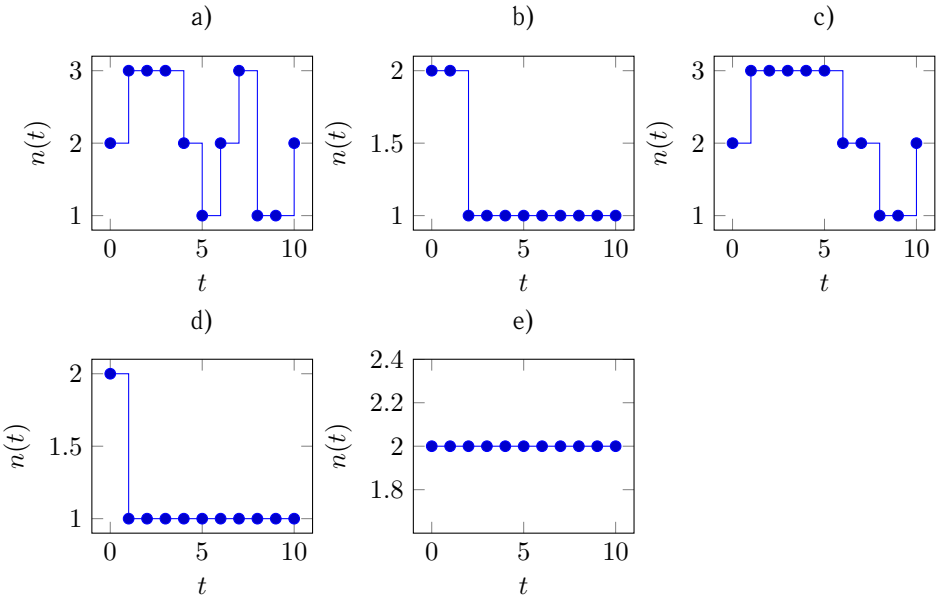

Рисунок 2.2 — Оптимальные траектории $n(t)$ – решения задачи (2.3.a): a) $p = (0, 0, 2.3, 0.8)$, I; b) $p = (390.00, 128.00, 1.30, 0.10)$, II; c) $p = (195.00, 8.00, 2.50, 0.40)$, III, d) $p = (240.00, 216.00, 1.20, 0.10)$, IV, e) $p = (390.00, 0.00, 2.20, 0.00)$, V

На рис. 2.3 нанесены границы указанных зон задачи (2.3.a).

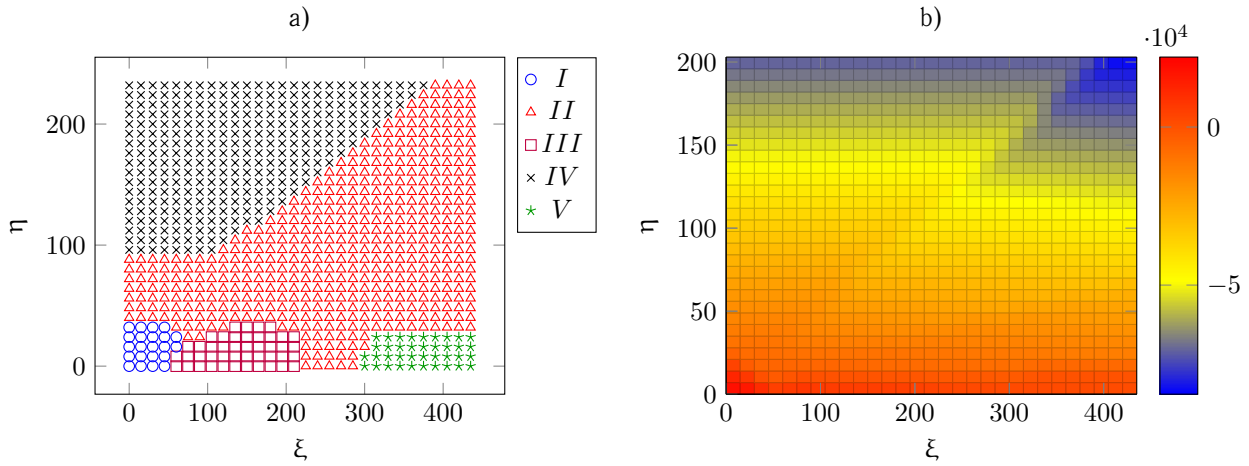

Рисунок 2.3 — a) Зоны типовых динамических режимов для задачи (2.3.a); b) Значения функционала для задачи (2.3.a)

2.3 Формализация и постановка задачи оптимального управления в условиях неопределенности

Рассмотрим задачу (2.1)-(2.3) в условиях неопределенности, когда известен только прогноз временного ряда факторов производства, характеризуемый ε.

Задача оптимального управления иерархической структурой производственной подсистемы предприятия при $t \in [0, T]$ имеет вид:

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} J(n(t), t, \varepsilon) + \hat{J}(n(T), T, \varepsilon) \to \max_{n(t), t \in [0,T]}, \tag{2.5}$$

где

$$J(n(t), t) = \gamma \Phi(n(t), x, \varepsilon) - U(\Delta n(t)) - \Xi(n(t)),$$

$$\hat{J}(n(T), T) = \gamma \Phi(n(T), x, \varepsilon) - \Xi(n(T)),$$

ε — случайная величина (параметр, характеризующий неопределенность).

$$N_\varepsilon(t) = N(t)(1 \pm \varepsilon). R^i_\varepsilon(t) = R^i(t)(1 \pm \varepsilon), i = \overline{1, m-1}. \tag{2.6}$$

Решаем задачу (2.5) K раз ($K \gg 1$) на плоскости (ξ, η) в области

$$D = \{(\xi, \eta) : \xi_{min} \le \xi \le \xi_{max} \wedge \eta_{min} \le \eta \le \eta_{max}\}$$

в точках $(\xi_j, \eta_i) \in D$,

$$\xi_j = \xi_{min} + j h_\xi,\ \eta_i = \eta_{min} + i h_\eta, j = \overline{1, n_\xi},\ i = \overline{1, n_\eta},$$

$$n_\xi = \frac{\xi_{max} - \xi_{min}}{h_\xi},\ n_\eta = \frac{\eta_{max} - \eta_{min}}{h_\eta}.$$

Сформируем матрицы индикаторов M^I, M^{II}, M^{III}, M^{IV}, M^V размерности $n_\eta \times n_\xi$, которые заполняем при каждом решении задачи (2.5), следующим образом:

$M^l_{ij} = 1$, если в точке (ξ_j, η_i) оптимальным является режим $l = \overline{I, V}$, иначе

$M_{ij}^{l} = 0$.

После K решений задачи (2.5)

$$M = \sum_{l=\overline{I,V}} M^{l},$$

элементы M_{ij} — показатели неоднозначности определения оптимального динамического режима в точке (ξ_j, η_i). Если $M_{ij} = 1$, то в точке (ξ_j, η_i) нет неоднозначности, если $M_{ij} > 1$, то в точке (ξ_j, η_i) существует неоднозначность определения оптимального динамического режима. Величина Δ_{ε}, равная числу отличных от единицы элементов матрицы M — показатель неоднозначности определения оптимального динамического режима в области D.

Введем параметр ζ, характеризующий относительный показатель неоднозначности определения оптимального динамического режима в D, равный отношению числа точек неоднозначного определения режима к числу точек однозначного определения динамического режима:

$$\zeta = \frac{\Delta_{ext}}{|D| - \Delta_{ext}},$$

где $|D|$ — мощность области D.

2.4 Имитационное моделирование неопределенности и решения задачи оптимального управления многошаговым методом динамического программирования

Приведем пример решения задачи (2.5) при единичных технологических коэффициентах для $m = 4$, $T = 10$. Факторы производства заданы временными рядами представленными на рис. 2.4.

На рис. 2.5 нанесены границы указанных зон задачи (2.5).

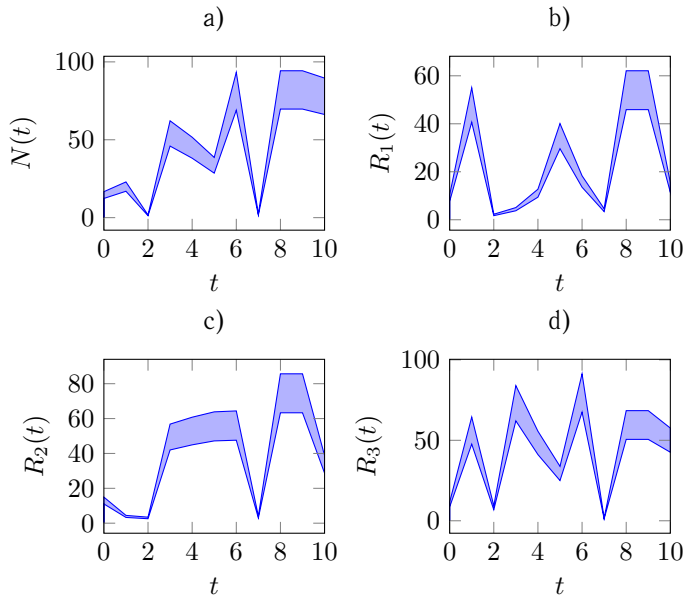

Рисунок 2.4 — Временной ряд значений факторов производства в условиях неопределенности для задачи (2.5)

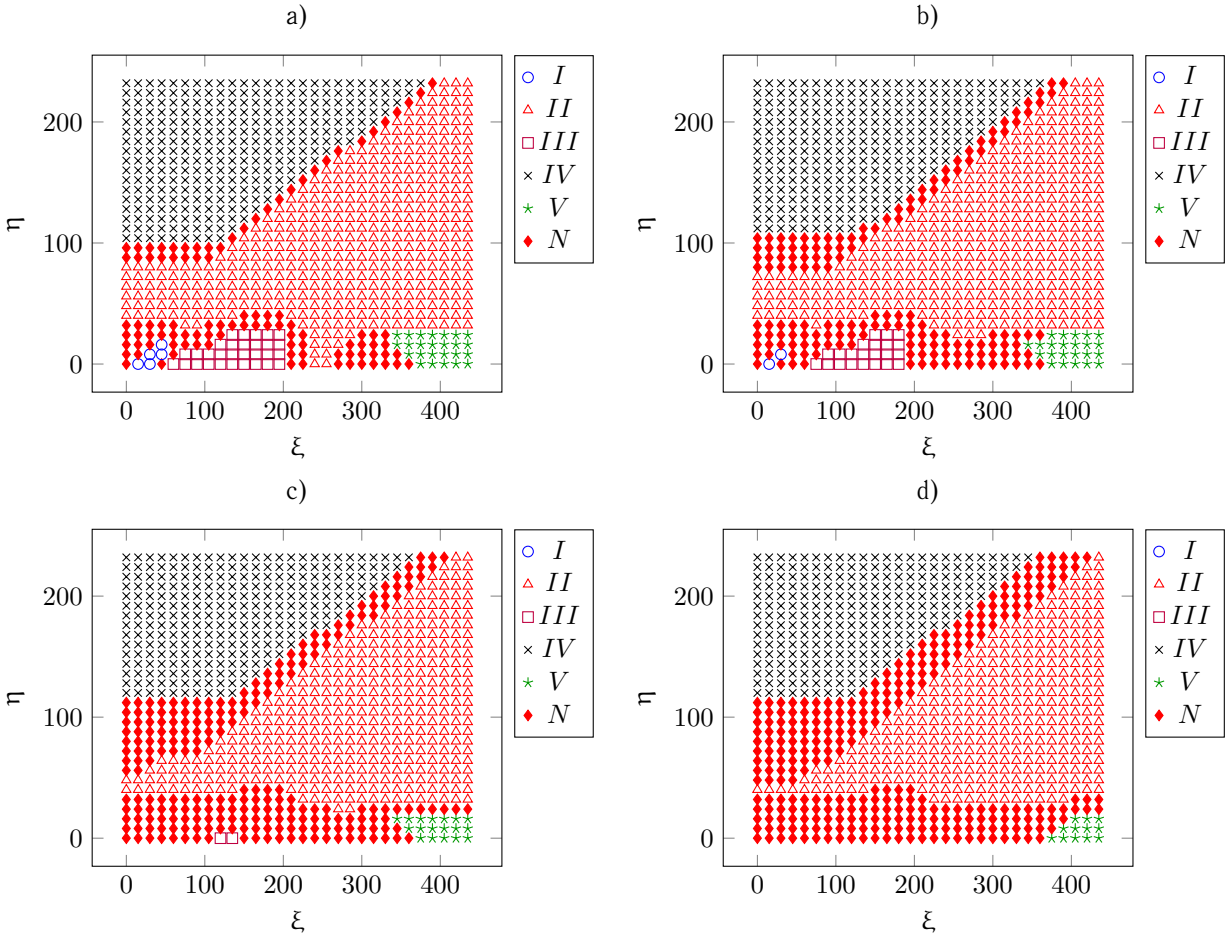

Рисунок 2.5 — Границы зон типовых динамических режимов в условиях неопределенности: a) $\varepsilon = 0,1$, b) $\varepsilon = 0,2$, c) $\varepsilon = 0,3$, d) $\varepsilon = 0,5$ (I–V — зоны типовых динамических режимов, N — зоны неоднозначного определения оптимального динамического режима)

На рис. 2.6 показана зависимость параметра ζ от ε.

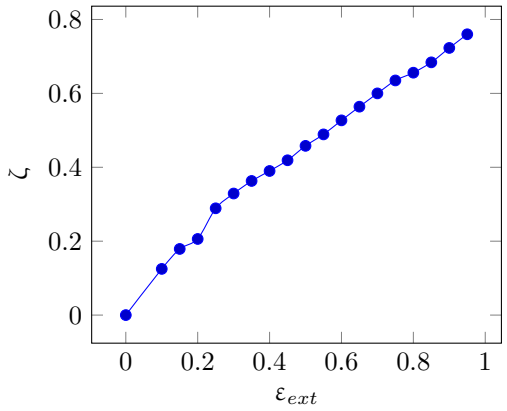

Рисунок 2.6 — Зависимость параметра ζ от ε_{ext}

2.5 Выводы

Управление вспомогательной технологической структурой, с одной стороны, повышает устойчивость значений производственной функции организации к внешним возмущениям, с другой — вносит неопределенность в ее зависимость от трансформационных факторов, что подчеркивает объективную обусловленность последней трансакционными факторами, отражающими структуру и функции системы управления. Для синтеза организационных конфигураций на основе представленного инструмента моделирования, позволяющего оценивать эффективность различных подсистем организации по их вкладу в конечный результат (в нашем случае через неопределенность задачи управления операционным ядром), необходимо аналогичным образом построить и их структурнозависимые производственные функции и решить задачу структурной оптимизации и распределения ресурса между ними. Оптимизация структуры организации сводится к поиску оптимальной степени информационной и организационной эффективности, числа слоев иерархической структуры производ-

ственной подсистемы предприятия, вида управленческой иерархии при заданной неопределенности внешней среды. Кроме того, представленный инструмент может использоваться для моделирования организационной адаптации к инновационному процессу, спонтанно изменяющему технологические коэффициенты различных ПФ ПП, в результате чего изменяется оптимальная пропорция их аргументов. Алгоритмы адаптации зависят, с одной стороны, от внутренней институциональной среды организации, стимулирующей или, наоборот, запрещающей фрактализацию иерархической структуры производственной подсистемы предприятия, с другой — от отношения скорости организационных процессов и частоты возникновения технологических инноваций.

Глава 3. Модели и алгоритмы управления и сценарно-имитационного моделирования динамики структуры малых искусственных русел пойменных территорий

Целью настоящего исследования является изучение свойств оптимальности локальных искусственных русловых систем пойменных территорий. Предложен метод поиска топологической структуры и площади поперечных сечений искусственных русел, максимизирующих суммарную взвешенную площадь затапливаемой территории. Для адекватности постановки и решения задачи управления проведено адаптивное зонирование цифровой модели территории поймы на участки с незначительным эффектом межзонного затопления при малых и средних паводках. Оптимальная пропускная способность малых русел разыскивалась с помощью многошагового рекурсивного метода динамического программирования. Представлены результаты численной реализации алгоритма с использованием компьютерных гидродинамических имитаций паводковой динамики и геоинформационным моделированием пространственно распределенных параметров рельефа нескольких участков территории северной части Волго-Ахтубинской поймы с искусственными локальными русловыми системами. Построен взвешенный ориентированный граф межфакторных взаимодействий, определяющих паводковую динамику северной части Волго-Ахтубинской поймы, при помощи которого проведена формализация сценариев развития ситуации и динамики параметров, непосредственно определяющих оптимальную локальную русловую структуру. Приведены субъективные оценки вероятности сценариев и нечеткие оценки динамики параметров русловой структуры.

3.1 Системный анализ и имитационное гидродинамическое моделирование динамики паводковых вод на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы

3.1.1 Системный анализ паводковых явлений на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы

Волго–Ахтубинская пойма, расположенная в нижнем течении р. Волги, имеет протяженность около 450 км., площадь ее территории превышает 20 тыс. кв. км. На ее территории расположено несколько тысяч малых русел, через которые происходит весеннее паводковое затопление. В северной части Волго—Ахтубинской поймы расположены природный парк с ценными представителями флоры и фауны, значительное число населенных пунктов, ведется сельскохозяйственный, лесной и рекреационный бизнес. Жизнь экосистемы ВАП полностью определяется весенним паводковым режимом р. Волги, который с 1959 г. регулируется Волжской ГЭС (ВГЭС) и поэтому существенно отличается от природного. В последние десятилетия наблюдается деградация пойменной экосистемы Волго—Ахтубинской поймы вследствие прогрессирующего снижение уровня паводкового затопления [34; 35].

Топологическая структура русел северной части Волго—Ахтубинской поймы представима в виде бинарного дерева с многими десятками уровней ветвления. Однако, существенное различие в величине и характере расходов воды в ветвях этого дерева обусловливают представление структуры с учетом способа ее функционирования и существа решаемой задачи управления. С учетом этого, будем считать, что первый (высший) уровень иерархической гидрологической структуры территории северной части Волго—Ахтубинской поймы образуют три магистральных водотока (р. Волга, р. Ахтуба и ерик «Пахотный»). Второй —- связанные с ними 58 русел глубиной 2–2,5 м., образующих локальные русловые системы. Третий уровень образуют русла глубиной 1,5–2м., связанные

с руслами второго уровня. Русла четвертого уровня меньшей глубины имеет небольшое число локальных русловых систем.

Анализ результатов гидрологических исследований волжского бассейна [3; 21] и комплексного обследования северной части Волго—Ахтубинской поймы [34; 35] позволяет формально описать взаимодействие главных факторов ее паводковой динамики взвешенным ориентированным графом, вершины которого имеют следующий содержательный смысл: средний объем паводковых вод, поступающих на территорию; максимальный объем паводковых вод, поступающих на территорию (2); средний объем природного весеннего паводка (3); средний объем весеннего попуска Волжской ГЭС (4); максимальный объем весеннего попуска Волжской ГЭС (5); доля паводковых вод, поступающих в р. Ахтуба (6); доля паводковых вод, поступающих в малые русла (7); пропускная способность малых русел (8); доля социохозяйственной территории (9); уровень развития дорожной сети (10); уровень гидрологической безопасности (11). Граф межфакторных взаимодействий представлен на рис. 3.1:

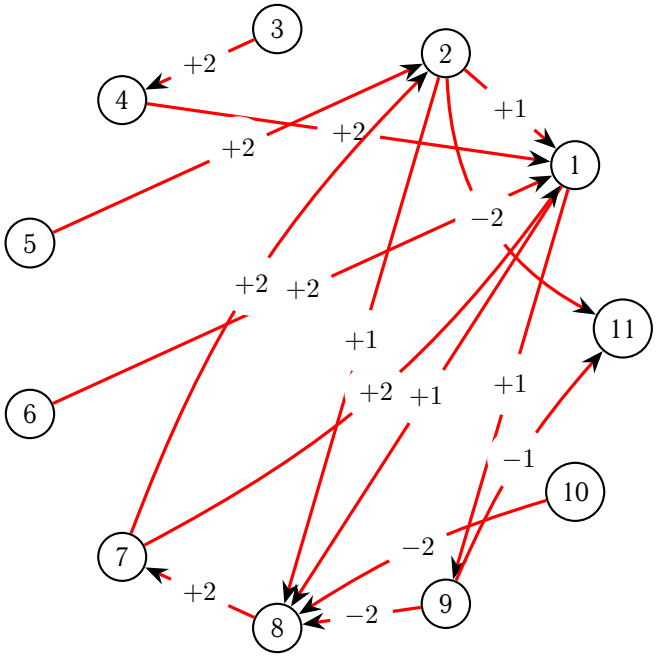

Рисунок 3.1 — Взвешенный ориентированный граф межфакторных взаимодействий

В матрице связности $\|a_{ij}\|$ $i, j = \overline{1, 11}$ графа 3.1 обозначим слабые (медленные) взаимодействия элементами $a_{ij} = \pm 1$, сильные (быстрые) — элементами

$a_{ij} = \pm 2$. Тогда ненулевые элементы этой матрицы имеют вид: $a_{18} = a_{19} = a_{21} = a_{28} = a_{9,10} = +1$, $a_{34} = a_{41} = a_{52} = a_{61} = a_{71} = a_{72} = a_{87} = +2$, $a_{9,11} = -1$, $a_{2,11} = a_{98} = a_{10,8} = -2$.

Одной из мер противодействия природной деградации Волго—Ахтубинской поймы является повышение эффективности территориального распределения паводковых вод путем строительства каналов с управляемой структурой и поперечным сечением русел.

3.1.2 Имитационное гидродинамическое моделирование динамики паводковых вод на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы

Использованная в диссертационной работе цифровая модель рельефа (ЦМР) Волго—Ахтубинской поймы и численная гидродинамическая модель (программно-алгоритмический комплекс «Web-ЭКОГИС») описаны в [32; 36; 75; 76; 120]. Основой цифровой модели рельефа (ЦМР) Волго—Ахтубинской поймы — сеточной функции $b(x_i, y_j)$ ($i = \overline{1, 800}$; $j = \overline{1, 2000}$) с размером ячейки 25м –- послужили спутниковые данные ASTER [119] и SRTM [122] с разрешением до 20 м. в плоскости Земли и до 0,5м по вертикали. Использование программы Landsat [91] позволило получить актуальные данные высокого разрешения (15—30 метров/пиксель). Добавление объектам атрибутивной информации проводилось с использованием топографической карты 1:50000 открытого пользования.

Общая протяженность малых русел северной части поймы составляет 884 км. Цифровая карта пойменных русел и речного дна строилась совместной векторизацией топографических и лоцманских карт русел Волго—Ахтубинской

поймы, Волги и Ахтубы [3] с использованием результатов экспедиционных исследований [21]. Актуализация ЦМР производится ежегодно с использованием регулярно обновляемых космических снимков, размещенных на сайте геологической службы США [121] в открытом режиме (спутник ДЗЗ Landsat 8), а также с помощью GPS–измерений границ паводковых затоплений. Актуальная векторная карта Волго—Ахтубинской поймы включает в себя слой гидросистемы, состоящий из 1542 русловых объектов с глубиной 1,5–3 м, слой инфраструктуры, включающий в себя 118 населенных пунктов, и слой рельефа местности, включающий более 15 тыс. рельефных объектов.

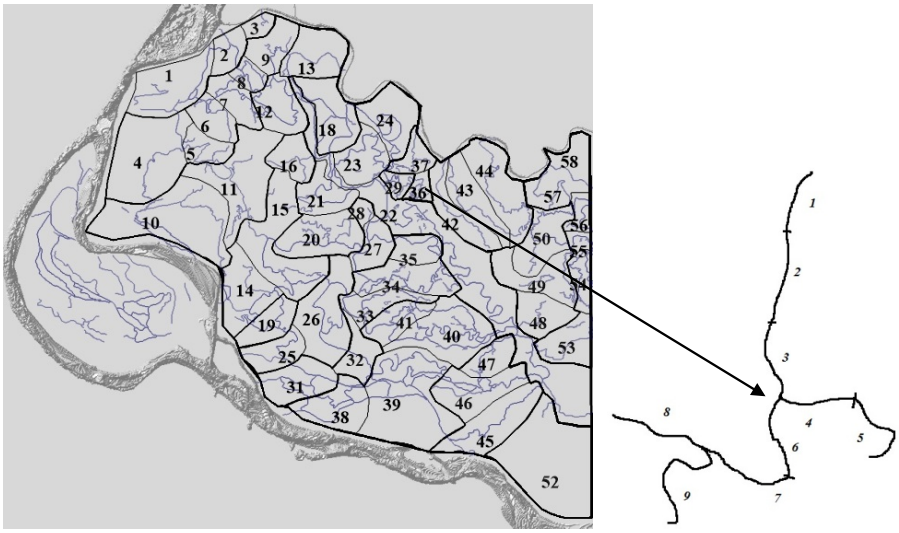

Рисунок 3.2 — Зоны и русла Волго—Ахтубинской поймы. Справа — русла зоны 37 [60]

Границы 58 зон, образованных локальными русловыми системами, показаны на рис. 3.2. Для примера там же изображены русла зоны 37.

Использованная в работе численная модель динамики поверхностных вод учитывает все основные факторы затопления территории: поверхностные и подземные источники воды — плотины, осадки, ключи, выход грунтовых вод на поверхность суши; рельеф местности с учетом антропогенной застройки территорий и рельефа дна водоемов; свойства подстилающей поверхности —- придонное трение, инфильтрация (новая многослойная нелинейная модель); внутреннее вязкое трение; ветровое воздействие — нагонные волны; вращение Земли —

сила Кориолиса; испарение [74]. Адекватность модели подтверждается результатами сравнения с данными наблюдений уровня воды на четырех гидропостах в северной части Волго—Ахтубинской поймы и площади водной поверхности в 2012 — 2016гг. с использованием данных спутника Landsat–7. Реализованы параллельные OpenMP, CUDA–, OpenMP–CUDA–версии расчетного модуля метода CSPH–TVD, снизившие в 700 раз вычислительную сложность задачи и позволившие довести время расчета 10–суточного паводка до 2 часов.

В [36] приведены оценки погрешности расчета площади затопленной территории в зонах Волго—Ахтубинской поймы, обусловленной варьированием гидрографа (расхода) паводка Q, неточностью цифровой модели рельефа, проводившиеся сравнением расчетных данных с данными спутниковых измерений, а также в ходе специального имитационного гидродинамического моделирования паводковых явлений со случайным изменением высоты в узлах расчетной сетки. Расчет целевой функции (приращения площади затопленной территории) проводился на основании объединения и пересечения этих карт. Наибольшая относительная погрешность вычисления целевой функции в почти во всех зонах Волго—Ахтубинской поймы E_1, определенная по площади разности объединения и пересечения цифровых карт затоплений, составила по данным [36] 5%.

Анализ космических снимков [37; 79] и результатов гидродинамических расчетов [32; 76] показал, что площадь затопления территории определяется величиной постоянного расхода Q и длительностью t первой фазы паводка, средние значения которых за последние 30 лет равны соответственно $25000\,м^3/с$ и 10 суток. Карта территории паводкового затопления северной части Волго—Ахтубинской поймы при $Q = 25000\,м^3/с$ и $t = 10$. представлена на рис. 3.3.

Гидрологическая структура Волго—Ахтубинской поймы создает возможность разбиения территории на зоны преимущественно независимого затопления локальными русловыми системами или даже отдельными ее руслами при

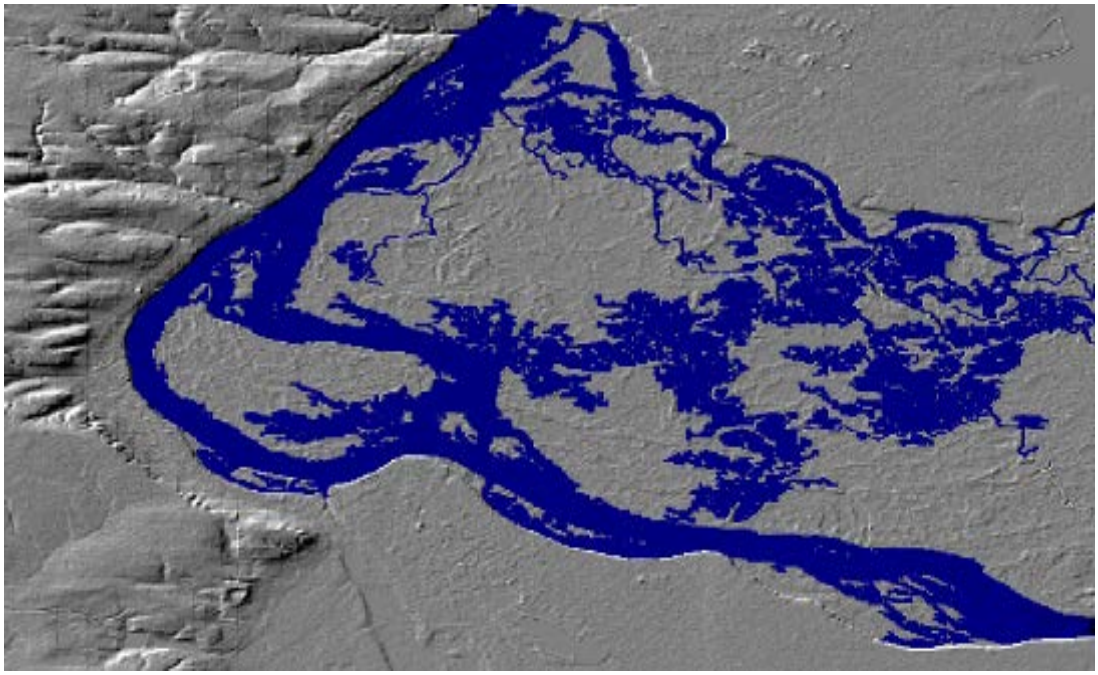

Рисунок 3.3 — Распределение воды на территории Волго—Ахтубинской поймы при $Q = 25000\,м^3/с$ и $t = 10$ суток [54]

малых паводках или в их начальных фазах. Мера относительной погрешности такого затопления E_2, растущая вместе с ростом числа зон, характеризуя потенциальную управляемость процесса паводкового затопления, ставит тем самым предел сложности системе пространственно распределенного управления.

Границы зон, минимизирующие погрешности межзонного затопления при заданных параметрах паводка, находятся в ходе гидродинамического и геоинформационного моделирования.

Как показало компьютерное гидродинамическое имитационное моделирование динамики паводковых вод на территории северной части Волго—Ахтубинской поймы, непосредственное затопление большей части зон при малых паводках осуществляются из русел третьего иерархического уровня при несущественных трансграничных эффектах. С другой стороны, характер затопления территории при больших паводках характеризуются низкой чувствительностью к структурным параметрам русел. Поэтому управление пропускной способностью русел для максимизации общей площади затапливаемой территории актуально

и потенциально осуществимо в большей части зон при значениях параметров первой фазы паводка Q, t и меньших, чем их средние величины. При этом общая площадь затопленной территории является суммой (взвешенной суммой) площадей независимых зонных затоплений, расчитываемых по результатам численного гидродинамического моделирования.

Расчет расходов паводковых вод на элементах локальных русловых структур показал примерно равное их распределение между боковыми руслами третьего уровня при их числе от 2 до 4.

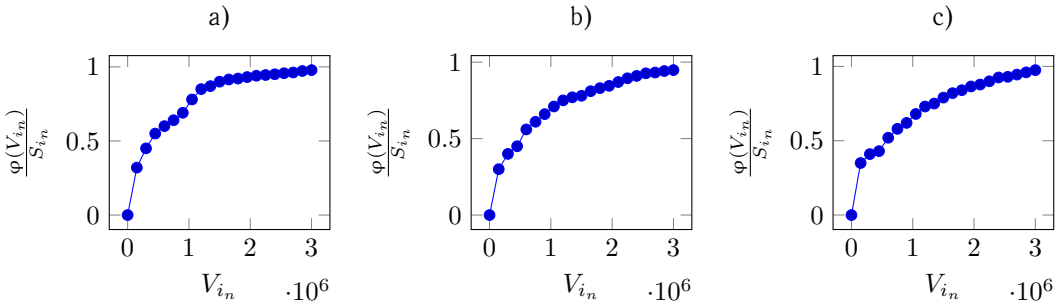

Рисунок 3.4 — Графики $S_{i_n}^{zat} = \varphi(V_{i_n})$

Относительная погрешность в построении этих функций вследствие варьирования значений расхода Q паводковых вод и наличия эффектов межзонного затопления и затопления из русел высших уровней составляет $E_1 + E_2$.

3.2 Задача оптимизации структуры искусственных малых русел пойменной территории с управляемым поперечным сечением

3.2.1 Постановка задачи

Результаты имитационного моделирования динамики паводковых вод в Волго—Ахтубинской пойме в разделе 3.1.2 позволяют сделать вывод о потенциальной возможности управления их пространственным распределением в некоторой области параметров паводка при адаптивном зонировании территории с уче-

том локальных особенностей рельефа и русловой структуры. Однако структура локальных русловых систем Волго—Ахтубинской поймы, сформированная в условиях природных паводков, может быть неоптимальной в изменившихся за последние десятилетия паводковых условиях. Кроме того, социохозяйственное освоение территории и прогрессирующая природная деградация постепенно меняют значимость паводкового затопления для отдельных ее участков. Поэтому представляет интерес поиск типичной зависимости оптимальной структуры локальных русловых систем от параметров паводка и рельефа территории на основе имитационного моделирования с решением задачи оптимизации структуры для каждого набора параметров рельефа и паводка.

Представим следующую формальную задачу оптимизации структуры искусственных малых русел пойменной территории с управляемым поперечным сечением. Модель пойменной территории (квадрат со стороной L) описывается цифровой моделью рельефа, представленной сеточной функцией $b(i,j)_i^N$ высот. На территории задана серия (m,n)-разбиений: n-кратных рекурсивных дроблений на m равных частей, дающих в результате m^n одинаковых участков (зон). Каждому (m,n)-разбиению территории соответствует (m,n)-структура (дерево) искусственных русел, схематично представленная для нескольких примеров на рис. 3.5.

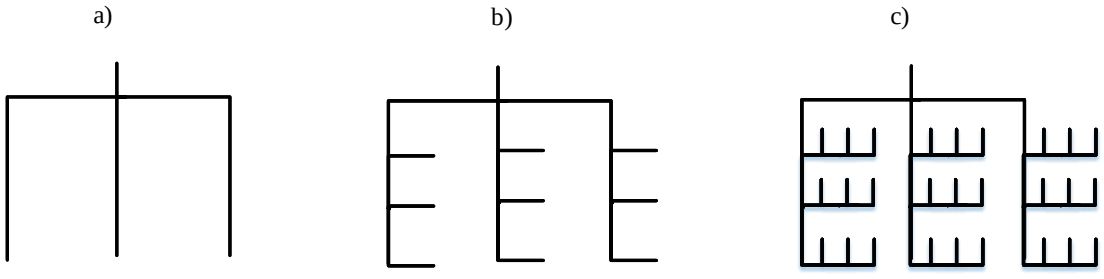

Рисунок 3.5 — a) (3,1)-дерево; b) (3,2)-дерево; c) (3,3)-дерево

Введем комплексный индекс $i_1 i_2 \dots i_k$ ($i_j = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$, $k = \overline{1,n}$).

Объем паводковых вод V_0, поступивших на территорию за время t, определяется формулой $V_0 = Q_0 t$, где Q_0 — расход расход воды через входное русло

территории. Обозначим $\bar{V}$ — объем вод, локализованных в руслах (в период первой фазы паводка все сечение русел заполнено водой, поэтому величина рассчитывается на основе геометрических параметров русел). Для объемов вод в зонах справедливы балансовые соотношения

$$V_0 = V_{i_0} - \bar{V}, V_{i_0} = \sum_{i_1=1}^{m} V_{i_1},$$

$$\forall i_1 : V_{i_1} = \sum_{i_2=1}^{m} V_{i_1 i_2},$$

$$\dots,$$

$$\forall i_1 i_2 \dots i_{n-1} : V_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = \sum_{i_n=1}^{m} V_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}. \quad (3.1)$$

Далее комплексный индекс $i_1 i_2 \dots i_k$ ($i_j = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$, $k = \overline{1,n}$) для краткости записывается как i_k. С помощью этого индекса, например, можно записать, что $\bar{V} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\sum\limits_{i_k} \bar{V}_{i_k} \right]$.

Предполагаем, что в каждой зоне задан коэффициент относительной экологической ценности $\alpha_{i_n} = \frac{a_{i_n}}{\sum\limits_{i_n} a_{i_n}}$, ($a_{i_n} = \overline{0, a_{max}}$). Площадь затопленной территории каждой из зон описывается вогнутыми функциями $S_{i_n}^{zat} = \varphi_{i_n}(V_{i_n})$, полученными путем кусочно-линейных аппроксимаций временных рядов $S_{i_n}^{zat} = \varphi_{i_n}(V_{i_n}(t_k))$, полученных агрегированием соответствующих участков массива карт затоплений $K(t_k)$, $t_k = 10^3 k$, $k = \overline{1,500}$, полученных в ходе численного гидродинамического моделирования (см. п. 3.1.2). С учетом результатов п. 3.1.2 расходы воды в русловой системе можно задать формулами

$$Q_{i_1} = \frac{Q_0}{m}; \forall i_k : Q_{i_k} = \frac{Q_{i_{k-1}}}{m}, k = \overline{2,n}. \quad (3.2)$$

Численное моделирование паводковой динамики показало, что погрешность этих формул для используемых значений параметров модели не превысила 5%. Управлениями пропускной способностью русел с площадью сечения считаем

доли их открытых частей $u_{i_k} \in [0;1]$ $(k = \overline{1,n})$. Тогда, в случае введения управлений, соотношения (3.2) можно записать в виде

$$\forall i_k : Q_{i_k} = \frac{u_{i_k} Q_{i_{k-1}}}{U_{i_{k-1}} m}, k = \overline{2,n}, U_{i_{k-1}} = \sum_{j=1}^{m} u_{i_{k-1}j}. \tag{3.3}$$

Задачу управления водными потоками в русловой (m,n)-структуре в течение времени t можно записать в виде

$$\varphi(V_0) = \sum_{i_n} \alpha_{i_n} \varphi_{i_n}(V_{i_n}(u_{i_k})) \to \max_{\{u_{i_k}\}}, u_{i_k} \in [0;1], \bar{V} + \sum_{i_n} V_{i_n} = V_0. \tag{3.4}$$

С учетом соотношений (3.1)–(3.3) задачу (3.4) можно представить в виде

$$\varphi(V_0) = \sum_{i_n} \alpha_{i_n} \varphi_{i_n}(V_{i_n}) \to \max_{\{V_{i_n}\}}, \bar{V} + \sum_{i_n} V_{i_n} = V_0. \tag{3.5}$$

Решение задачи (3.5) обозначим $V^*_{i_n}(V_0)$. Тогда справедливы соотношения

$$\forall i_k : V^*_{i_k}(V_0) = \sum_{j=1}^{m} V^*_{i_k j}(V_0), k = \overline{n-1,1}.$$

С учетом этих соотношений и формул (3.3) оптимальное управление $u^*_{i_k}$ $(k = \overline{1,n})$ задается формулами

$$u^*_{i_k j} = \frac{V^*_{i_k j}}{V^*_{i_k j^*}}, j^* = \arg\max_j V^*_{i_k j}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}. \tag{3.6}$$

3.2.2 Алгоритм решения

Решение этой задачи находилось рекурсивным (по глубине (m,n)-дерева) численным многошаговым (с дискретизацией величин объема паводковых вод ΔV_{i_n}) методом динамического программирования (рекурсией по ширине (m,n)-

дерева). Уравнения метода для первого шага рекурсии по структурному параметру n (самый нижний уровень структурной иерархии) имеют вид:

$$W_{i_{n-1},m-k}(V_{i_{n-1}}) = \max_{l_{m-k}=\overline{0,p_{m-k}}} \left(\alpha_{i_{n-1},m-k}\varphi_{i_{n-1},m-k}(l_{m-k}\Delta V_{i_{n-1}}) + \right.$$
$$\left. + W_{i_{n-1},m-k+1}((p_{m-k} - l_{m-k})\Delta V_{i_{n-1}})\right)$$
$$p_{m-k} = p_{m-k+1} + l_{m-k+1}; k = \overline{0,m};$$
$$W_{i_{n-1},m+1-k} = 0; V_{i_{n-1}} = v\Delta V_{i_{n-1}}, v = \overline{0,P_{i_{n-1}}},$$
$$P_{i_{n-1}}\Delta V_{i_{n-1}} = V^{\max}_{i_{n-1}}, V^{\max}_{i_{n-1}} = \frac{zV_0}{m^{n-1}}, z = \overline{1,Z}. \quad (3.7)$$

Величина Z является настраиваемым параметром в связи с наличием эффекта межзонного затопления. (Относительную погрешность построения функций $S^{zat}_{i_n} = \varphi_{i_n}(V_{i_n})$ обозначим E_1.) При больших Z этот эффект значителен, т.е. зависимости некорректны. Превышение заданного предела относительной величины этого эффекта хотя бы в одной из зон требует считать весь процесс неуправляемым. При малых Z влияние межзонного затопления снижается, но одновременно снижается и эффективность управления. Настройка этой величины для каждого набора параметров проводилась в ходе численных экспериментов.

Решение задачи (3.5),(3.7) обозначим

$$l^*_{m-k}(V_{i_{n-1}}); V^*_{i_{n-1},m-k} = l^*_{m-k}\Delta V_{i_{n-1}},$$
$$\varphi^*_{i_{n-1},m-k}(V_{i_{n-1}}) = \varphi_{i_{n-1},m-k}(V^*_{i_{n-1}}), k = \overline{0,m-1}. \quad (3.8)$$

Для задачи всех следующих шагов рекурсии по параметру n формулы ме-

тода имеют вид:

$$W_{i_{n-q},m-k}(V_{i_{n-q}}) = \max_{l_{m-k}=\overline{0,p_{m-k}}} \Big(\varphi^*_{i_{n-q},m-k}(l_{m-k}\Delta V_{i_{n-q}}) + \\ + W_{i_{n-q},m-k+1}((p_{m-k} - l_{m-k})\Delta V_{i_{n-q}}) \Big)$$

$$p_{m-k} = p_{m-k+1} + l_{m-k+1}; k = \overline{0,m}; W_{i_{n-1},m+1-k} = 0;$$

$$V_{i_{n-q}} = v\Delta V_{i_{n-q}}, v = \overline{0, P_{i_{n-q}}},$$

$$P_{i_{n-q}}\Delta V_{i_{n-q}} = V^{\max}_{i_{n-q}}, V^{\max}_{i_{n-q}} = \frac{zV_0}{m^{n-q}}, z = \overline{1,Z}; q = \overline{2,n}. \quad (3.9)$$

Оптимальные значения m^* и n^* находятся методом полного перебора.

3.2.3 Результаты численной реализации алгоритма

Численное решение задачи (3.4) - (3.9) проводилось в рамках серии гидродинамических имитаций паводкового затопления модельных рельефов пойменной территории с искусственными (m,n)-системами русел при $m = 2,3,4$ и $m = 1,2,3$ для выбранных на основании результатов раздела 3.1.2 характеристиками параметров паводка: $Q_0 = 100\,м^3/c$, $t = (0-100)\times 10^4 c$, территории: квадрата со стороной $L = 5;10;15$*(км.)*, высотной неоднородностью $\Delta b = 8;16;24$*(м.)*, паводковой социоприродохозяйственной неоднородностью $a_{\max} = 3;6;9$ при уклоне русел $0,03°$, следующих значениях диаметров $(d(n))$ и глубин $(h(n))$ русел: $d(1) = 50м$, $h(1) = 3м$, $d(2) = 30м$, $h(2) = 2м$, $d(3) = 10м$, $h(3) = 1,5м$. Для каждого значения неоднородности рельефа Δb строилось 10 карт, для которых случайно выбирались значения сеточной функции $b(x_i,y_j)$, отличающиеся на случайную величину ξ $(0 \le \xi = |b(x_i,y_j) - b(x_k,y_m)| \le \Delta b \forall i,j,k,m)$. Площадь затопленной территории каждой из зон описывалась функциями $S^{zat}_{i_n} = \varphi_{i_n}(V_{i_n})$, полученными

путем кусочно-линейных аппроксимаций временных рядов $S_{i_n}^{zat}(t_k)$, $V_{i_n}^{zat}(t_k)$, полученных агрегированием соответствующих участков массива карт затоплений $K(t_k)$, $t_k = 10^4 k$, $k = \overline{1,50}$, полученных в ходе численного гидродинамического моделирования (см. п. 3.1.2).

Коэффициенты паводковой неоднородности каждой из m^n зон для каждой карты выбирались случайно в диапазоне $\overline{1, a_{\max}}$.

В качестве целевой функции использовалась средняя (по 10 картам) взвешенная относительная площадь затопленной части территории $\frac{S_0^{zat}(u_{i_n})}{S_0}$. В связи с небольшим числом карт, ограниченным общей вычислительной сложностью серии экспериментов, для контроля корректности имитационных экспериментов вычислялось среднее (по 10 картам) значение модуля относительной разности значений целевой функции E_2 .

Наличие неопределенностей E_1 и E_2 требует оценки неопределенности в поиске оптимальных значений структурных русловых параметров. Считалось, что в случае примерного равенства или превышения относительной разности значений целевой функции для различных параметров структуры суммы неопределенностей $E_1 + E_2$ оптимальная структура не определена.

При расчете зависимостей площади затопления зон от объема поступивших в них паводковых вод $S_{i_n}^{zat} = \varphi_{i_n}(V_{i_n})$ проводился контроль эффекта межзонного затопления. Если при значении t максимальный (по зонам) относительный эффект превышал 5%, то при $V_0 \geq Q_0 t$ процесс затопления далее считался неуправляемым.

Результаты численного решения задач (3.4)–(3.9) с использованием результатов прямых гидродинамических расчетов паводковых затоплений территорий приведены в таблице 3.1. Случаи корректного управления русловыми сечениями отмечены в столбце U^* символом «u_{i_n}», отсутствие корректно определяемых управлений — символом «1». Случаи неопределенности вида русловой структуры отмечены в соответствующих столбцах символом «*»:

Таблица 3.1

Результаты численной оптимизации структуры искусственных русел модельных рельефов модельной пойменной территории

	L(км.)	Δb_{ij}(м.)	$a_{\max}$	$V_0(м^3) \times 10^6$	m^*	n^*	U^*	$\frac{\varphi(V_0(u^*))}{\varphi(V_0(1)}$	$\frac{S_0^{zat}(1)}{S_0}$	$E_1 + E_2$
1	5	8	3	4	2	1	$u_{i\,n}^*$	-	0,00	0,00
2	6	9	4	8	2	1	$u_{i\,n}^*$	1,35	0,05	0,01
3	7	11	3	16	2	2	$u_{i\,n}^*$	1,19	0,26	0,02
4	5	8	6	24	*	*	1	-	0,50	0,08
5	8	8	5	20	2	2	$u_{i\,n}^*$	1,25	0,12	0,02
6	5	16	3	4	2	1	$u_{i\,n}^*$	0,00	0,00	0,00
7	6	16	3	8	2	2	$u_{i\,n}^*$	1,33	0,04	0,01
8	5	16	3	16	2	3	$u_{i\,n}^*$	1,21	0,24	0,03
9	7	16	7	24	*	*	1	-	0,47	0,10
10	5	16	3	36	*	*	1	-	0,63	0,2
11	5	24	3	24	2	3	$u_{i\,n}^*$	1,23	0,22	0,03
12	5	8	6	16	2	3	$u_{i\,n}^*$	1,11	0,27	0,03
13	5	16	6	16	2	3	$u_{i\,n}^*$	1,24	0,21	0,03
14	8	24	5	16	2	3	$u_{i\,n}^*$	1,40	0,17	0,03
15	5	8	9	16	2	3	$u_{i\,n}^*$	1,24	0,21	0,03
16	10	9	3	16	2	1	$u_{i\,n}^*$	1,52	0,05	0,01
17	11	10	3	32	2	2	$u_{i\,n}^*$	1,28	0,14	0,01
18	10	8	3	48	2	2	$u_{i\,n}^*$	1,18	0,27	0,03
19	13	8	3	16	2	1	$u_{i\,n}^*$	1,87	0,02	0,01
20	14	7	4	32	3	1	$u_{i\,n}^*$	1,48	0,06	0,01
21	15	10	3	48	3	2	$u_{i\,n}^*$	1,40	0,10	0,02
22	15	8	3	64	3	2	$u_{i\,n}^*$	1,36	0,14	0,02
23	15	8	3	80	3	2	$u_{i\,n}^*$	1,15	0,20	0,02
24	15	8	3	100	3	2	$u_{i\,n}^*$	1,26	0,27	0,04

Таблица 3.2

$V_1^* = 11,191; V_2^* = 8,809; u_1^* = 1,000; u_2^* = 0,787$

$i_1 i_2$	$\alpha_{i_1 i_2}$	$V^*_{i_1 i_2}$	$u^*_{i_1 i_2}$	$\frac{S^{zat}_{i_1 i_2}(u^*_{i_1 i_2})}{S_{i_1 i_2}}$	$\frac{S^{zat}_{i_1 i_2}(1)}{S_{i_1 i_2}}$	$\frac{\varphi(V_0(u_{i_1 i_2}))}{\varphi(V_0(1))}$
11	0,4286	8,393	1,000	0,226	0,138	1,64
12	0,1429	2,798	0,312	0,076	0,145	0,524
21	0,1429	2,921	0,624	0,098	0,137	0,715
22	0,2857	5,887	1,000	0,145	0,119	1,22

Таблица 3.3

$u_1^* = 1,000; u_2^* = 0,822; u_{11}^* = 0,836; u_{12}^* = 1,000; u_{21}^* = 1,000; u_{22}^* = 0,282$

$i_1 i_2 i_3$	$\alpha_{i_1 i_2 i_3}$	$V^*_{i_1 i_2 i_3}$	$u^*_{i_1 i_2 i_3}$	$\frac{S^{zat}_{i_1 i_2 i_3}(u^*_{i_1 i_2 i_3})}{S_{i_1 i_2 i_3}}$	$\frac{S^{zat}_{i_1 i_2 i_3}(1)}{S_{i_1 i_2 i_3}}$	$\frac{\varphi(V_0(u_{i_1 i_2 i_3}))}{\varphi(V_0(1))}$
111	0,100	1,905	0,628	0,221	0,283	0,781
112	0,150	3,034	1,000	0,363	0,311	1,167
121	0,250	3,254	1,000	0,565	0,246	2,297
122	0,050	0,651	0,186	0,141	0,307	0,459
211	0,150	2,376	0,762	0,340	0,315	1,079
212	0,20	3,169	1,000	0,447	0,298	1,500
221	0,050	0,781	1,000	0,123	0,265	0,464
222	0,050	0,781	1,000	0,135	0,322	1,087

В качестве примера в таблицах 3.2–3.3 приведены результаты расчета всех переменных задачи для значений параметров, соответствующих строкам 5 и 12 таблицы 3.1.

При равномерной экологической ценности и малой неравномерности рельефа территории максимальный объем воды в зонах в оптимальном решении мало отличается от среднего значения объема, и поэтому критическое значение объема паводка практически не зависит от сложности русловой структуры. В ином случае с ростом сложности структуры русел величина критического объема паводка, при котором можно корректно управлять дамбами быстро падает. Тогда структура с большой сложностью практически неуправляема (для решения задачи максимизации взвешенной площади затопления), и оптимизация структуры до некоторого предела сложности может проводиться с управлением паводковыми плотинами, а после — без этого управления.

Результаты численного решения задачи (3.4)–(3.9) для серии значений объема паводковых вод $1,0 \times 10^7 \leq V_0(м^3) \leq 7,5 \times 10^7$ и переменного параметра паводковой неоднородности рельефа представлены в таблице 3.4. Ее строки помечены значениями оптимальных параметров структуры m^*, n^*, столбцы —

Таблица 3.4

Значения объемов паводка $V_0 \times 10^7 (м^3)$, отвечающих параметрам оптимальной локальной русловой структуры m^*, n^* и паводковой неоднородности рельефа $a_{max} = \overline{3,6}$

$m^*; n^* \backslash a_{\max}$	3	4	5	6
2;1 (A)	0,0-3,0	0,0-2,6	0,0-2,4	0,0-2,1
2;2 (B)	3,0-3,9	2,7-3,8	2,5-3,7	2,2-3,2
2;3 (C)	3,9-4,5	3,8-4,4	3,7-4,3	3,3-3,8
3;2 (D)	4,5-5,5	4,4-5,0	4,3-4,5	3,8-4,2
3;3	-	5,0-5,5	4,5-5,5	4,3-5,5
2-3;2-3 (E)	5,5-7,5	5,5-7,5	5,5-7,5	5,5-7,5

значениями $a_{max} = \overline{3,6}$.

Последняя строка таблицы 3.4 отвечает случаю неуправляемого затопления.

Результаты численного решения задачи (3.4)–(3.9) и поиска оптимальных значений структурных параметров для всех пяти участков территории Волго—Ахтубинской поймы незначительно отличаются друг от друга.

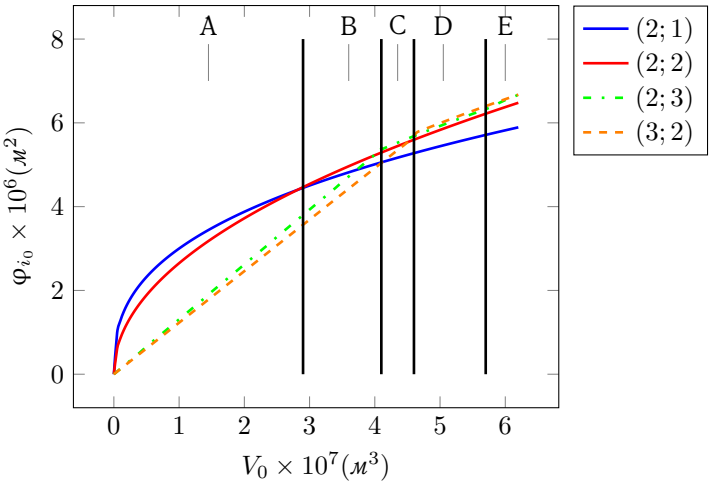

Рисунок 3.6 — Динамика затопления одного из участков территории Волго—Ахтубинской поймы при различных параметрах русловой структуры. Указан вид оптимальных структур и области их оптимальности ($A : (m^*, n^*) = (2; 1)$, $B : (m^*, n^*) = (2; 2)$, $C : (m^*, n^*) = (2; 3)$, $D : (m^*, n^*) = (3; 2)$, $E : (m^*, n^*) = (2-3; 2-3)$)

На рис. 3.6 изображена сравнительная динамика затоплений одного из участков территории Волго—Ахтубинской поймы с различной структурой русел. Кривые для управляемых сечений построены по результатам работы алгоритма оптимизации. Кривым на рис. 3.6. соответствуют данные первого столбца таблицы 3.4. Участки A–D соответствуют управляемым, участок E — неуправляемым сечениям русел и весьма слабой зависимости площади затопленной территории от русловой структуры. Структуре русел данного участка террито-

рии Волго—Ахтубинской поймы, близкой к реальной, отвечает участок B.

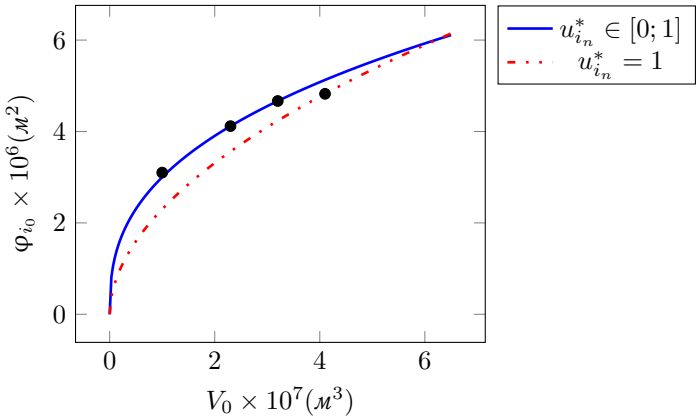

Рисунок 3.7 — Динамика затопления одного из участков территории Волго—Ахтубинской поймы с $(2;1)$-структурой русел управляемыми ($u^*_{i_n} \in [0;1]$) и неуправляемыми ($u^*_{i_n} = 1$) сечениями. Жирными точками отмечены результаты гидродинамических расчетов с управляемыми сечениями русел

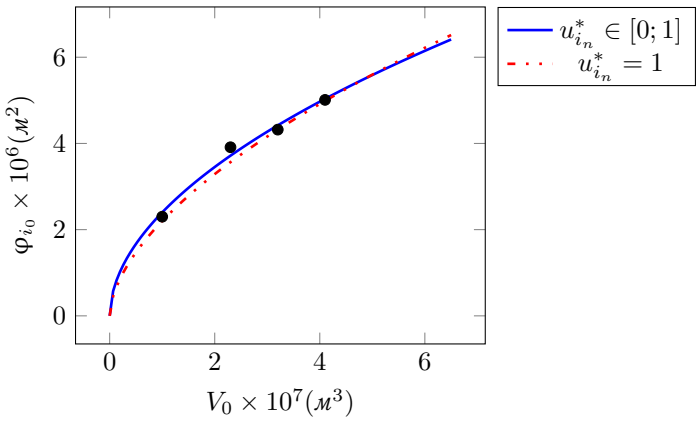

Рисунок 3.8 — Динамика затопления одного из участков территории Волго—Ахтубинской поймы с $(2;2)$-структурой русел управляемыми ($u^*_{i_n} \in [0;1]$) и неуправляемыми ($u^*_{i_n} = 1$) сечениями. Жирными точками отмечены результаты гидродинамических расчетов с управляемыми сечениями русел

На рис. 3.7 и рис. 3.8 изображена сравнительная динамика затопления одного из участков территории Волго—Ахтубинской поймы с оптимальной структурой русел для случаев управляемых и неуправляемых сечений. Кривые для случая управляемых сечений построены по результатам работы алгоритма оптимизации. Там же жирными точками отмечены результаты проверочных прямых гидродинамических расчетов с найденными значениями оптимальных управлений.

Учет неопределенности $E_1 + E_2$ (в разных случаях $E_1 + E_2 \in [0,07; 0,45]$) приводит к существенному сужению зон определенного определения оптималь-

Таблица 3.5

Значения объемов паводка $V_0 \times 10^7 (м^3)$, отвечающих параметрам оптимальной локальной русловой структуры m^*, n^* и паводковой неоднородности рельефа $a_{max} = \overline{3,6}$, с учетом неопределенности $E_1 + E_2$

$m^*; n^* \backslash a_{\max}$	3	4	5	6
2;1	0,0-2,3	0,0-2,2	0,0-2,1	0,0-1,9
2;1-2	2,3-3,5	2,2-3,4	2,1-3,5	1,9-3,5
2;2-3	3,5-4,3	3,4-4,3	3,5-4,3	3,5-4,3
2-3;2-3 (E)	4,3-7,5	4,3-7,5	4,3-7,5	4,3-7,5

ных структурных параметров и исчезновению этих зон для сложных структур (см. таблицу 3.5).

3.3 Сценарно-имитационное моделирование долгосрочной динамики оптимальной структуры искусственных малых русел Волго—Ахтубинской поймы

Продолжающаяся деградация природных весенних паводков вместе с социохозяйственным освоением и экологической деградацией территории Волго—Ахтубинской поймы актуализируют исследование зависимости оптимальной структуры ее локальных русловых систем от долгосрочных тенденций социоприродохозяйственной динамики.

Анализ построенного графа (а также экспертных оценок [34]) позволяет выявить тенденции изменения главных факторов динамики паводковой ситуации в Волго—Ахтубинской пойме и дать субъективные оценки их вероятности (за десятилетний период), представленные в таблице 3.6. Введем следующую простейшую лингвистическую шкалу силы тенденции каждого фактора и ее цифровое обозначение: «сильно (2)», «слабо (1)», «рост (+1;+2)», «падение (+1;+2)», «стабильность (0)». Используя данные таблицы 3.6, получим 8 трехмерных векторов — сценариев развития комплексной тенденции изменения факторов паводковой динамики.

Результаты раздела 3.2 показывают, что оптимальная структура русел с

Таблица 3.6

Тенденции изменения главных факторов паводковой динамики Волго—Ахтубинской поймы

	Фактор	Тенденция (оценка вероятности)
1	Средний объем весеннего паводка	Сильное (0,1) или слабое (0,9) снижение
2	Доля паводковых вод, поступающих в р. Ахтуба	Сильное (0,1) или слабое (0,9) снижение
3	Доля социохозяйственной территории Волго—Ахтубинской поймы	Сильное (0,9) или слабое (0,1) повышение

управляемым сечением определяется объемом паводковых вод V_0 и параметром паводковой неоднородности рельефа $a_{\max}$, поэтому прогноз ее изменения требует дополнения данных таблицы 3.4 данными прогноза изменения этих параметров.

Каждому сценарию с помощью построенного графа межфакторных взаимодействий поставим в соответствие вектор $(\Delta V_0, \Delta a_{max})$ сценария развития ситуации, непосредственно определяющей динамику оптимальной локальной структуры русел, и функции принадлежности нечеткого оценивания его относительных изменений (рис. 3.9).

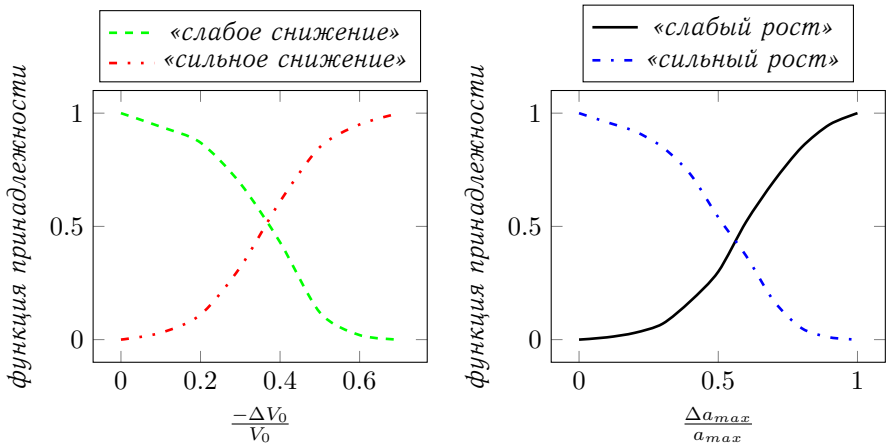

Рисунок 3.9 — Функции принадлежности нечеткого оценивания относительных изменений параметров развития ситуации

Результаты анализа, представленные в таблице 3.7, показывают, что существует 4 сценария развития ситуации, субъективные оценки вероятности которых соответственно равны: $p(-1;-1) = 0,729$; $p(-2;-1) = 0,089$; $p(-1;-2) = 0,08$; $p(-2;-2) = 0,019$. С учетом этих данных, функций, представленных

Таблица 3.7

Сценарии развития паводковой ситуации в Волго—Ахтубинской поймы

Фактор\комплексная тенденция	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	-2	-1	-1	-2	-2	-1	-2
2	-1	-1	-2	-1	-2	-1	-2	-2
3	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-2
ΔV_0	-1	-2	-2	-1	-2	-2	-2	-2
$\Delta a_{\max}$	-1	-1	-1	-2	-1	-2	-2	-2
Субъективная оценка вероятности	0,729	0,08	0,08	0,08	0,009	0,009	0,009	0,001

на рис. 3.9, и данных таблицы 3 были построены нечеткие оценки динамики параметров русловой структуры m^*;n^*, представленные на рис. 3.10.

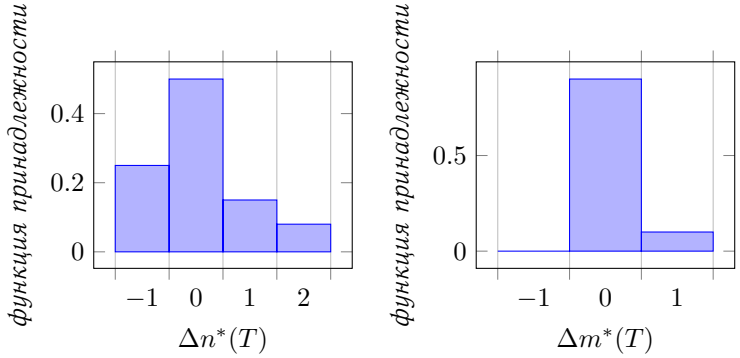

Рисунок 3.10 — Нечеткие оценки динамики параметров русловой структуры m^*, n^*

Проведенные исследования показали потенциальную возможность управления структурой локальных русловых систем пойменных территорий с целью повышения эффективности использования паводковых вод для их орошения. Главными факторами, определяющими оптимальную структуру этих систем являются объем паводковых вод и мера неоднородности территории. При малых и средних паводках управление русловой системой может дать существенный эффект. При больших паводках затопление территории определяется, главным образом, ее рельефом и практически не зависит от структуры ее локальных русловых систем.

Выводы

Исследование зависимости найденных оптимальных структур производственной подсистемы предприятия от параметров позволяет заключить, что рост меры отклонения фактических пропорций факторов производства от нормативных величин, а также рост неравномерности факторных пропорций элементарных производств ведут к росту их сложности. Исследование зависимости найденных оптимальных структур искусственных русловых систем пойменных территорий от параметров позволяет сделать следующие выводы:

1. оптимальная структура искусственных русловых систем определяется объемом паводка, размером территории, неоднородностью ее рельефа и социохозяйственной структуры, а также возможностью оптимального управления пропускной способностью русел;
2. рост объема паводка до определенной величины сопровождается ростом сложности оптимальной русловой структуры, при дальнейшем превышении этой величины чувствительность характера затопления территории к структуре русловой системы падает;
3. рост отношения объема паводка к площади сначала увеличивает, а затем уменьшает сложность оптимальной структуры;
4. рост неоднородности рельефа и социохозяйственной структуры территории сопровождается ростом сложности оптимальной русловой структуры;
5. оптимальное управление пропускной способностью русел увеличивает сложность их оптимальной структуры и максимальное значение площади паводкового затопления территории;
6. рост объема паводка до определенной величины не снижает эффективности управления пропускной способностью русел;

7. при превышении этой величины эффективность управления падает вследствие эффекта перекрестного затопления участков территории из различных русел;
8. рост неопределенности в оценке параметров паводка снижает сложность оптимальной русловой структуры;

Дальнейшее развитие результатов диссертационного исследования может проводиться в следующих направлениях:

- создание моделей и алгоритмов управления адаптацией организационных систем на основе комплексной оптимизации и оптимального управления многомерными иерархическими структурами, описывающими различные их подсистемы;
- создание частных моделей и алгоритмов управления структурой конкретных производственных и природных потоковых систем на основе созданных общих моделей и алгоритмов ;
- развитие аналитических и алгоритмических методов оптимизации иерархических структур, описываемых n-дольными иерархическими графами со структурно зависимыми функциями общего вида;

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адизес, И. Управление жизненным циклом корпорации / И. Адизес. — СПб : Питер, 2008. — 384 с.

2. Арис, Р. Дискретное динамическое программирование / Р. Арис. — М. : Мир, 1969. — 173 с.

3. Асарин, А.Е. Речные наводнения: причины и последствия. Что можно и нужно сделать? / А.Е. Асарин // Стратегия гражданской защиты: проблемы и исследования. — 2013. — № 1. — С. 416–427.

4. Базилевич, Л. А. Моделирование организационных структур / Л. А. Базилевич. — Ленинград : ЛГУ, 1978. — 160 с.

5. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — Москва : Изд-во иностранной литературы, 1960. — 400 с.

6. Берталанфи, Л. Общая теория систем: критический обзор / Исследования по общей теории систем / Л. Берталанфи. — М. : Прогресс, 1969. — 23 - 82 с.

7. Боулдинг, К. Общая теория систем – скелет науки / Исследования по общей теории систем / К. Боулдинг. — М. : Прогресс, 1969. — 124 с.

8. Верещинский, А. Сито-воздушный сепаратор «ЛУЧ ЗСО» — лучшее решение в технике очистки зерна [Очистка зерна на мукомольных и крупяных заводах] / А. Верещинский // Хлебопродукты. — 2010. — № 4. — С. 32–33.

9. Воронин, А.А. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы / А.А. Воронин, С.П. Мишин // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 5. — С. 120–132.

10. Воронин, А.А. Оптимальные иерархические структуры / А.А. Воронин, С.П. Мишин. — М. : ИПУ РАН, 2003. — 214 с.

11. Воронин, А. А. Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы / А.А. Воронин, С.П. Мишин // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 8. — С. 136–150.

12. Воронин, А. А. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева / А. А. Воронин, С. П. Мишин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2001. — № 6. — С. 93–113.

13. Воронин, А.А. Управление структурой операционного ядра организации / А.А. Воронин, М.А. Харитонов // Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем» – М .: ИПУ РАН, 14 – 16 ноября 2011. — 2011. — № 1. — С. 31–36.

14. Воронин, А. А. Модель численной оптимизации структуры операционного ядра организации / А. А. Воронин, М. А. Харитонов // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 39. — С. 165–183.

15. Воронин, А. А. Динамическое управление структурой операционного ядра предприятия / А.А. Воронин, М.А. Харитонов // Труды международной научно-практической конференции «УТЭОСС-2012». — 2012. — № . — С. 928 - 930.

16. Воронин, А. А. Численное моделирование и анализ типов динамики структуры операционного ядра организации / А.А. Воронин, М.А. Харитонов // Материалы 6-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2013). — 2013. — Т. 3. — С. 13 - 17.

17. Воронин, А.А. Модель динамической оптимизации операционного ядра организационной системы / А.А. Воронин, М.А. Харитонов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2012. — № 2(17). — С. 41–59.

18. Воронин, А. А. Модель адаптации операционного ядра организации

/ А.А. Воронин, М.А. Харитонов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 4(35). — С. 43–64.

19. Воронин, А.А. Модели оптимизации иерархических структур в системах потоками / А. А. Воронин, М. А. Харитонов // Вести высших учебных заведений Черноземья. — 2017. — № 2(48). — С. 69–79.

20. Восстановление деталей машин: Справочник под ред. В.П. Иванова / Ф.И. Пантелеенко, В.П. Лялякин, В.П. Иванов, В.М. Константинов. — М. : Машиностроение, 2003. — 672 с.

21. Георгиевский, В.Ю. Гидрологический режим и водные ресурсы / В. Ю. Георгиевский, А.Л. Шалыгин // Методы оценки последствий изменения климата для физических и биологических систем. — М. : Росгидромет, 2012. — С. 53–86.

22. Губко, М. В. Математические модели оптимизации иерархических структур / М.В. Губко. — М. : ЛЕНАНД, 2006. — 264 с.

23. Губко, М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей / М.В. Губко // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 12. — С. 116–130.

24. Губко, М.В. Оптимальные иерархические структуры при монотонном функционале стоимости / М.В. Губко // Управление большими системами. — 2003. — Вып. 3. — С. 27–34.

25. Губко, М.В. Однородные функции затрат менеджеров и оптимальная организационная структура / М.В. Губко // Управление большими системами. — 2006. — Вып. 15. — С. 103–116.

26. Губко, М.В. Алгоритмы построения субоптимальных организационных иерархий / М.В. Губко // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 1. — С. 162–179.

27. Губко, М. В. Поиск оптимальных организационных иерархий при

однородных функциях затрат менеджеров / М. В. Губко // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 1. — С. 97–113.

28. Губко, М. В. Математические модели формирования рациональных организационных иерархий / М. В. Губко // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 9. — С. 114–139.

29. Губко, М. В. Оптимальные иерархии управления для функций затрат, представимых в виде суммы однородных функций / М. В. Губко // Проблемы управления. — 2009. — № 3. — С. 44–53.

30. Губко, М. В. Математическая модель оптимизации структуры иерархического меню / М. В. Губко, А. И. Даниленко // Проблемы управления. — 2010. — № 4. — С. 49–58.

31. Задачи оптимизации иерархических структур / В. Т. Дементьев, А. И. Ерзин, Р.М. Ларин, Ю.В. Шамардин. — Новосибирск : НГУ, 1996. — 167 с.

32. Задача управления гидрологическим режимом в эколого-экономической системе «Волжская ГЭС – Волго-Ахтубинская пойма». Ч.1. Моделирование динамики поверхностных вод в период весеннего паводка / А. В. Хоперсков, С. С. Храпов, А. В. Писарев, А. А. Воронин, М. В. Елисеева, И. А. Кобелев // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 18–25.

33. Зак, Ю. А. Оптимальное распределение технологических операций на сборочном конвейере / Ю.А. Зак // Кибернетика. — 1990. — № 4. — С. 45–55.

34. Землянов, И. В. Анализ экологических последствий эксплуатации Волгоградского водохранилища для сохранения биоразнообразия основных водно-болотных территорий Нижней Волги / И.В. Землянов, О.В. Горелиц, А. Е. Павловский. — М. : Отчет о НИР ФГУ «ГОИН», 2010. — 675 с.

35. Иванов, В.В. Влияние гидроузлов на деформации пойменных берегов и русловых форм в низовьях реки Волги и Кубани / В.В. Иванов, В.Н. Коротаев // Эрозия почв и русловые процессы. — 2008. — № 16. — С. 224–242.

36. Имитационные модели динамики поверхностных вод с использованием данных дистанционного зондирования: влияние рельефа местности / А. А. Воронин, М. В. Елисеева, А. В. Писарев, А. В. Хоперсков, С. С. Храпов // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. — 2012. — № 3. — С. 54–62.

37. Карты Google сайт. (дата обращения: 15.08.2017). — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: http://maps.google.com. — Загл. с экрана.

38. Катханов, М.Н. Оптимизация структуры сложной технической системы по минимаксному критерию / М.Н. Катханов, В.В. Сафронов // Автоматика и вычислительная техника. — 1977. — № 4. — С. 40–45.

39. Катханов, М. Н. Вопросы оптимизации и моделирования сложных систем: Препринт / АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» / М.Н. Катханов, В.В. Сафронов. — М., 1980. — 47–53 с.

40. Кафаров, В. В. Анализ и синтез химико-технических систем / В. В. Кафаров, В.П. Машалкин. — М. : Химия, 1991. — 432 с.

41. Клейнер, Г. Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. / Г.Б. Клейнер. — М. : Финансы и статистика, 1986. — 239 с.

42. Корольков, С. А. Об одной модели оптимального управления формированием штатов ППС университета / С. А. Корольков, А. Г. Лосев, И. М. Решетникова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 6: Университетское образование. — 2012. — № 13. — С. 21–25.

43. Корольков, С. А. Модель оптимального планирования штата профессорско-преподавательского состава кафедр вуза / С. А. Корольков, А. Г. Лосев, И. М. Решетникова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 3: Экономика. Экология. — 2013. — № 1. — С. 149–154.

44. Лагоша, Б. А. Методы и модели совершенствования организационных структур / Б.А. Лагоша. — М. : Наука, 1988. — 192 с.

45. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. — М. : Наука, 1990. — 384 с.

46. Математические модели организаций / А.А. Воронин, М.В. Губко, Д. А. Новиков, С.П. Мишин. — М. : УРСС, 2008. — 360 с.

47. Методика оптимизации сложных технических систем в условиях риска / Ю. В. Ведерников, А. М. Кравцов, В. В. Сафронов, С. А. Умеренков // Информационно-управляющие системы . — 2007. — № 1. — С. 40–45.

48. Минцберг, Г. Структура в кулаке. Создание эффективной организации./ Пер. с английского под ред. Ю.Н. Каптуревского / Г. Минцберг. — Санкт-Петербург : Питер, 2004. — 512 с.

49. Мишин, С. П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах / С.П. Мишин. — М. : ПМСОФТ, 2004. — 205 с.

50. Мишин, С. П. Динамическая задача синтеза оптимальной иерархической структуры / С.П. Мишин // Управление большими системами. — 2003. — Вып. 3. — С. 55–75.

51. Мишин, С. П. Оптимальность «конвейерной» иерархии управления / С. П. Мишин // Управление большими системами. — 2005. — Вып. 11. — С. 60–74.

52. Мишин, С. П. Условия оптимальности дивизиональной, функциональной и матричной иерархии управления / С. П. Мишин // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 4. — С. 98–112.

53. Мишин, С.П. Подходы к моделированию оптимальных многоуровневых организаций / С. П. Мишин // Управление большими системами. — 2006. — Вып. 12-13. — С. 109–117.

54. Модели и механизмы эколого-экономического управления слабоустойчивыми социоприродохозяйственными системами / А. А. Васильченко, А. А. Воронин, С.Е. Гребенюк, Ю.Е. Кругликова, Н.М. Кузьмин, Е.А. Петрова,

А.В. Писарев, М.В. Писарева, Ю.Е. Радченко, Н.В. Решетникова, А.В. Хоперсков, С.С. Храпов, А.В. Шевандрин, О.С. Якушкина. — Волгоград : Консалт, 2015. — 488 с.

55. Новиков, Д. А. Сетевые структуры и организационные системы / Д. А. Новиков. — М. : ИПУ РАН, 2003. — 102 с.

56. Новиков, Д. А. Теория управления организационными системами / Д. А. Новиков. — М. : Физматлит, 2007. — 584 с.

57. Оптимизация и сценарно-имитационное моделирование динамики структуры малых искусственных русел пойменных территорий / В.С. Бакулин, А. А. Воронин, А. А. Васильченко, М. А. Харитонов // Математ. физика и компьютер. моделирование. — 2017. — Т. 20. — С. 26–38.

58. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов, Н.И. Данилина, С.И. Сергеев. — М. : Высшая школа, 1989. — 430 с.

59. Платон, Диалоги / Платон. — М. : АСТ, 2017. — 320 с.

60. Проектирование механизмов управления гидрологическим режимом Волго-Ахтубинской поймы на основе геоинформационного и гидродинамического моделирования / А. А. Воронин, А. А. Васильченко, С. С. Храпов, Ю. Е. Радченко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 1(32). — С. 24–37 .

61. Рожихин, П. В. О поиске оптимальной траектории преобразований графа организации / П. В. Рожихин // Управление большими системами. — 2004. — Вып. 6. — С. 105–116.

62. Рожихин, П.В. О траекториях преобразования структуры организационных систем / П.В. Рожихин // Управление большими системами. — 2004. — Вып. 9. — С. 190–200.

63. Рожихин, П. В. Оценка мощности пространства состояний иерархи-

ческой структуры / П. В. Рожихин // Управление большими системами. — 2005. — Вып. 11. — С. 75–80.

64. Управление наследованием показателей качества при восстановлении, обработке, сборке и эксплуатации деталей машин / М.Л. Хейфец, А.А. Лысов, Н. А. Кусакин, Г. Б. Премент // Известия МГТУ «МАМИ» . — 2008. — № 2(6). — С. 323–329.

65. Харитонов, М.А. Задача оптимизации операционного ядра организации / М. А. Харитонов // Материалы научной сессии (22-29 апреля 2011 г., Волгоград). — 2011. — С. 15 - 18.

66. Харитонов, М.А. Обобщенный механизм управления организационной системой на большом интервале времени / М. А. Харитонов // Материалы научной сессии (23-27 апреля 2012 г.,). — 2012. — С. 29 - 32.

67. Харитонов, М.А. Обобщенный механизм управления организационной системой на большом интервале времени / М. А. Харитонов // Материалы научной сессии (21-25 апреля 2012 г.,). — 2012. — С. 29 - 32.

68. Харитонов, М. А. Оптимальные динамические режимы управления структурой операционного ядра организации / М.А. Харитонов // Материалы X Всероссийской школы-конференции молодых ученых (5-7 июня 2013 г., Уфа). — 2013. — С. 287 - 260.

69. Харитонов, М.А. Модель оптимизации структуры операционного ядра организации / М. А. Харитонов // Материалы XI Всероссийской школы-конференции молодых ученых (8-12 сентября 2014 г., Арзамас). — 2014. — С. 736 - 754.

70. Харитонов, М.А. Многофакторная модель динамической оптимизации структуры операционного ядра организации / М.А. Харитонов // Материалы XII Всероссийской школы-конференции молодых ученых (7-11 сентября 2015 г., Волгоград). — 2015. — С. 362 - 379.

71. Харитонов, М. А. Динамическое управление структурой операционного ядра организационной системы / М. А. Харитонов // Материалы XIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых (5-9 сентября 2015 г., Самара). — 2016. — С. 362 - 379.

72. Харитонов, М.А. Оптимизация структуры производственной подсистемы организации в условиях неопределенности / М.А. Харитонов // Материалы XIV Всероссийской школы-конференции молодых ученых (4-8 сентября 2017 г., Пермь. — 2017. — С. 309 - 324.

73. Харитонов, М. А. Алгоритм построения производственной функции сложноструктурированных производств / М. А. Харитонов // Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство Материалы Тринадцатой Всероссийской научно-практической конференции, с международным участием (23-25 ноября 2016 г., г. Старый Оскол). — 2016. — Т. II. — С. 117 - 120.

74. Храпов, С. С. Моделирование динамики поверхностных вод: Монография. / С. С. Храпов, А. В. Хоперсков, М. А. Еремин. — Волгоград. : Издательство ВолГУ, 2010. — 132 с.

75. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD-подхода / С.С. Храпов, А.В. Хоперсков, Н. М. Кузьмин, А. В. Писарев, И. А. Кобелев // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 282–297.

76. Особенности динамики затопления Волго-Ахтубинской поймы в зависимости от режимов испарения и инфильтрации / С.С. Храпов, А.В. Писарев, А. А. Воронин, Т. А. Дьяконова, Е. А. Циркова // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика.. — 2012. — Т. 16, № 1. — С. 43–47.

77. Цирлин, А. М. Об оптимальной организации систем нагрева и охла-

ждения / А.М. Цирлин // Теоретические основы химической технологии. — 2012. — Т. 46, № 1. — С. 109.

78. Цирлин, А. М. Оптимальные циклы и циклические режимы / А. М. Цирлин. — М. : Энергоатомиздат, 1985. — 264 с.

79. Яндекс.Карты сайт. (дата обращения: 15.08.2017). — Электрон. текстовые дан. — Режим доступа: http://maps.yandex.ru. — Загл. с экрана.

80. Budgeting model of structural units based on normative per capita funding / S.A. Korolkov, A.G. Losev, I.M. Reshetnikova, V.V. Tarakanov // European researcher. — 2014. — Vol. 70, № 3-1. — P. 498–508.

81. A survey on assembly lines and its types / Z. Guan, S. Huang, J. Mirza, U. Saif // Frontiers of Mechanical Engineering. — 2014. — Vol. 9, iss. 2. — P. 95–105.

82. Adizes, I. Mastering Change: The Power of Mutual Trust and Respect in Personal Life, Family Life, Business and Society / I. Adizes. — Los Angeles. : Adizes Institute Publications, 1992. — 260 p.

83. Ali, A. Testing different cross-section spacing in 1D hydraulic modelling: a case study on Johor River, Malaysia / A. Ali, G. Baldassarre, D. Solomatine // Hydrological Sciences Journal. — 2015. — Vol. 60, № 2. — P. 351–360.

84. Anwar, A. A Review of RUP (Rational Unified Process) / A. Anwar // International Journal of Software Engineering. — 2014. — Vol. 5, iss. 2. — P. 8–24.

85. Arabzad, S. M. Efficiency analysis and optimisation of a multi-product assembly line using simulation / S. M. Arabzad, S. M. Sajjadi, H. Soroush // International Journal of Productivity and Quality Management. — 2014. — Vol. 13, iss. 1. — P. 89–104.

86. Arabzad, S. M. Efficiency analysis and optimisation of a multi-product assembly line using simulation / S. M. Arabzad, S. M. Sajjadi, H. Soroush

// International Journal of Productivity and Quality Management. — 2014. — Vol. 13, iss. 1. — P. 89–104.

87. Barnett, W.P. Modeling Internal Organizational Change / W.P. Barnett, G.R. Carroll // Annual Review of Sociology. — 1995. — Vol. 21. — P. 217–236.

88. Bailly, G. Toward optimal menu design / G. Bailly, A. Oulasvirta // Interactions. — 2014. — Vol. 21, № 4. — P. 40–45.

89. Besta, M. Slim Fly: A Cost Effective Low-Diameter Network Topology / M. Besta, T. Hoefler // International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. — 2014. — P. 348–359.

90. Blake, R.R. Building a dynamic corporation through grid organization development / R.R. Blake, J.S. Mouton. — Boston. : Addison-Wesley Publishing Company, 1969. — 120 p.

91. Landsat-8: Science and product vision for terrestrial global change research / D.P. Roy, M.A. Wulder, T.R. Loveland, C.E. Woodcock // Remote Sensing of Environment. — 2014. — Vol. 145. — P. 154–172.

92. Lee, J. Performance Evaluation of the Optimal Hierarchy for Cellular Networks / J. Lee, S. Park, I. Shin // Computational Science – ICCS 2007: 7th International Conference, Beijing, China, May 27 - 30, 2007, Proceedings, Part IV. — 2007. — Vol. 4490. — P. 449–456.

93. Beckmann, M. J. Some Aspects of Returns to Scale in Business Administration / M.J. Beckmann // The Quarterly Journal of Economics. — 1960. — Vol. 74, № 3. — P. 464 – 471.

94. Bland, R.G. New finite pivoting rules for the simplex method / R.G. Bland // Mathematics of Operations Research. — 1977. — Vol. 2, № 2. — P. 103–107.

95. Bolton, P. The Firm as a Communication Network. / P. Bolton, M. Dewatripont // The Quarterly Journal of Economics. — 1994. — Vol. 109, № 4. — P. 809–839.

96. Bolton, P. The Firm as a Communication Network. / P. Bolton, M. Dewatripont. — London. : MIT Press, 2005. — 744 p.

97. Devkota, J. Numerical simulation of flow dynamics in a tidal river under various upstream hydrologic conditions / J. Devkota, X. Fang // Hydrological Sciences Journal. — 2015. — Vol. 60, № 10. — P. 1666–1689.

98. Champy, J. Reengineering Management: The Mandate for New Leadership / J. Champy. — London. : Harper Collins Business, 1995. — 240 p.

99. Garicano, L. Hierarchies and Organization of Knowledge in Production / L. Garicano // The Journal of Political Economy. — 2000. — Vol. 108, № 5. — P. 874–904.

100. Geanakoplos, J. Theory of Hierarchies Based on Limited Managerial Attention / J. Geanakoplos // The Journal of Japanese and International Economies. — 1991. — Vol. 5, № 3. — P. 205 – 225.

101. Grant, R. M. TQM's Challenge to Management Theory and Practice / R.M. Grant, S. Rami, R. Krishnan // Sloan management review. — 1994. — Vol. 35. — P. 25–36.

102. Hart, O. On the Design of Hierarchies: Coordination vs Specialization / O. Hart // The Journal of Political Economy. — 2005. — Vol. 113. — P. 675 – 702.

103. Hydrological system analysis and modelling of the Kara River basin (West Africa) using a lumped metric conceptual model / A.A. Afouda, H.M Badjana, B. Diekkruger, M. Fink, J. Helmschrot, S. Kralisch, W. Wala // Hydrological Sciences Journal. — 2017. — Vol. 62, № 7. — P. 1094–1113.

104. Kauffman, S. The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution / S. Kauffman. — New York. : Oxford University Press, 1993. — 709 p.

105. Knowledge, compensation, and firm value: An empirical analysis of firm communication. / F. Li, M. Minnis, V. Nagar, M. Rajan // Journal of Accounting

and Economics. — 2014. — Vol. 58, iss. 1. — P. 96–116.

106. Kharitonov, M. Operating core of an organizational system: optimal control of support structure / M. Kharitonov, A. Svetlov, A. Voronin // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 107, № 4. — P. 889 - 901.

107. Kharitonov, M. Construction and analysis of the production function for complex structured productions / M. Kharitonov // SHS Web Conf.(3rd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2017)). — 2017. — Vol. 35. — Article ID: 01042.

108. Kruchten, A. The Rational Unified Process: An Introduction, Second Edition 2nd / A. Kruchten. — Boston. : Addison-Wesley Longman Publishing Co., 2000. — 320 p.

109. Kvocka, D. Flood hazard assessment for extreme flood events / D. Kvocka, R. A Falconer, M. Bray // Natural Hazards. — 2016. — Vol. 84, iss. 3. — P. 1569–1599.

110. MenuOptimizer: Interactive optimization of menu systems / G. Bailly, A. Oulasvirta, T. Kotzing, S. Hoppe // UIST 2013 - Proceedings of the 26th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology. — New York. : ACM, 2013. — P. 331–341.

111. Papadimitriou, C. H. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity / C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. — New York : Dover Publications, 1998. — 528 p.

112. Radner, R. Hierarchy: The Economics of Managing / R. Radner // Journal of Economic Literature. — 1992. — Vol. 30, № 3. — P. 1382–1415.

113. Sah, R. K. The Architecture of Economic Systems: Hierarchies and Polyarchies / R.K. Sah // The American Economic Review. — 1986. — Vol. 76, № 4. — P. 716 – 727.

114. Simon, H. A. The Compensation of Executives / H. A. Simon // Sociometry. — 1957. — Vol. 20, № 1. — P. 32–35.

115. Sheu, C.Y. Recent developments in optimal structure design / C.Y. Sheu, W. Prager // Applied Mechanics Reviews. — 1968. — Vol. 21, № 10. — P. 985–992.

116. Socio-hydrological modelling of flood-risk dynamics: comparing the resilience of green and technological systems / A. Castellarin, A. Ciullo, M. Crisci, A. Viglione // Hydrological Sciences Journal. — 2017. — Vol. 62, № 6. — P. 880–891.

117. The black widow high-radix Clos network / D. Abts, W. Dally, J. Kim, S. Scott // Proc. 33rd International Symposium on Computer Architecture. (ISCA'2006). — 2006. — P. 16–28.

118. The Distinct Effects of Information Technology and Communication Technology on Firm Organization. / N. Bloom, L. Garicano, R. Sadun, J. Van Reenen // Management Science. — 2014. — Vol. 60, iss. 12. — P. 2859–2885.

119. Thematic information content assessment of the ASTER GDEM: a case study of watershed delineation in West Java, Indonesia / E. Suwandana, K. Kawamura, Y. Sakuno, E. Kustiyanto // Remote Sensing Letters. — 2012. — Vol. 3, № 5. — P. 423–432.

120. The Numerical Simulation of Shallow Water: Estimation of the Roughness Coefficient on the Flood Stage / S. Khrapov, A. Pisarev, I. Kobelev, A. Zhumaliev, E. Agafonnikova, A. Losev, A. Khoperskov // Advances in Mechanical Engineering. — 2013. — Vol. 5. — Article ID: 787016.

121. The Shuttle Radar Topography Mission / T.G. Farr, P.A. Rosen, E. Caro, R. Crippen // Reviews Geophysics. — 2007. — Vol. 45, iss. 2. — Article ID: 2005RG000183.

122. The shuttle radar topography mission—a new class of digital elevation

models acquired by spaceborne radar / B. Rabus, M. Eineder, A. Roth, B. Richard // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. — 2003. — Vol. 57, № 4. — P. 241–262.

123. Tran, Q. Organizational Structure: Influencing Factors and Impact on a Firm / Q. Tran, Y. Tian // American Journal of Industrial and Business Management. — 2013. — № 3. — P. 229–236.

124. Troiano, L. Searching optimal menu layouts by linear genetic programming / L. Troiano, C. Birtolo, R. Armenise // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. — 2016. — Vol. 7, № 2. — P. 239–256.

125. Van Zandt, T. Efficient Parallel Addition / T. Van Zandt. — New York. : Bell Laboratories, 1990. — 287 p.

126. Voronin, A. A. The operating core of an organization: A constrained optimization model / A.A. Voronin, M.A. Kharitonov // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, № 1. — P. 167–178.

127. Watzlawick, P. Change: Principles of Problem Formation and Problem Resolution / P. Watzlawick, J. Weakland, R. Fisch. — New York. : Norton Books, 1974. — 172 p.

128. Weick, K.E. Organizational Change and Development / K.E. Weick, R. E. Quinn // Annual Review of Psychology. — 1999. — Vol. 50. — P. 361–386.

129. Williamson, O. Hierarchical Control and Optimal Firm Size / O. Williamson // The Quarterly Journal of Economics. — 1960. — Vol. 75, № 2. — P. 123 - 138.

130. Yang, W.H. On a class of optimization problems for framed structures / W.H. Yang // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1978. — Vol. 15, iss. 1. — P. 85–97.

Приложения

Приложение А. Структура программных комплексов и организация данных.

Структура программного комплекса оптимизации структуры производственной подсистемы предприятия

Описание основных блоков алгоритма 3.11:

Задание числа факторов производства (m)**.**

Описание. Ввод параметра m, характеризующего векторную природу макроэкономических факторов производства.

Выход. Параметр m.

Выбор типа структуры.

Описание. Выбирается один из видов структурных графов: универсальный преобразователь (S_0), сложный преобразователь (S_1), комплексный преобразователь (S_3) или специализированный преобразователь (S_3).

Выход. Параметр $p = \overline{1,3}$, идентифицирующий тип структуры S_p.

Ввод данных.

Описание. В зависимости от выбранного типа структуры (параметр p) задаются величины факторов производства, значения технологических коэффициентов:

- $p = 0$: $R_0 = \{\{R^k\}_{k=1}^m\}$ — исходные факторы производства,
  $A_0 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 1$: $R_1 = \{N, \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_1 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 2$: $R_2 = \{N, \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}, \{R^k\}_{k=1}^{m-1}, \{\{R^k R^l\}_{k=1}^{m-1}\}_{l=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,

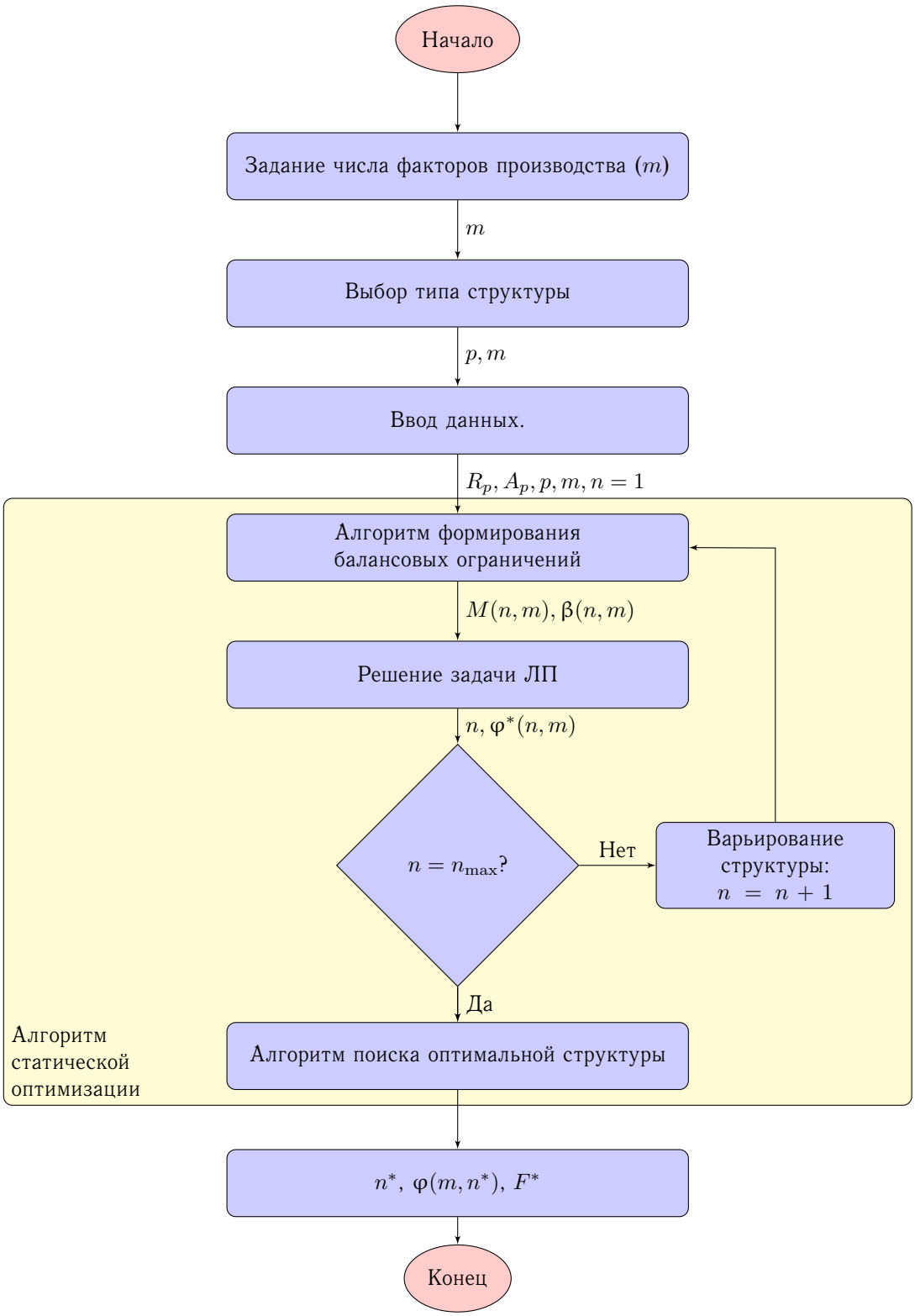

Рисунок 3.11 — Блок-схема алгоритма оптимизации иерархической структуры производственной подсистемы

$A_2 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.

- $p = 3$: $R_3 = \{N, \{R^k\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,

  $A_3 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.

Так же задается предельная сложность структуры ($n_{\max}$) и начальное зна-

чение параметра $n = 1$.

Выход. $R_p, A_p, p, m, n = 1$.

Алгоритм формирования балансовых ограничений.

Описание. В данном блоке для заданных значений параметров автоматически формируются все компоненты задачи линейного программирования.

Выход. $M(n, m), \beta(n, m)$.

Решение задачи ЛП.

Описание. В данном блоке решается задача линейного программирования модифицированным симплекс-методом.

Выход. $n, \varphi^*(n, m)$.

$n = n_{\max}$**?.**

Происходит проверка, достигнута ли предельная сложность структуры ($n_{\max}$).

Варьирование структуры: $n = n + 1$

Производится варьирование структуры.

Алгоритм поиска оптимальной структуры.

Описание. Ищется $n^* \in [1, n_{\max}]$ с помощью любого (как правило, малое количество точек, а так же монотонность целевой функции от параметра n) одномерного метода безусловной оптимизации.

Выход. Получаем максимум целевой функции F^*, оптимальную структуру n^* и оптимальный вектор факторных потоков на оптимальной структуре $\varphi^*(n^*, m)$.

Структура и блок-схема имитационного моделирования зависимости оптимальных симметричных иерархических структур от параметров

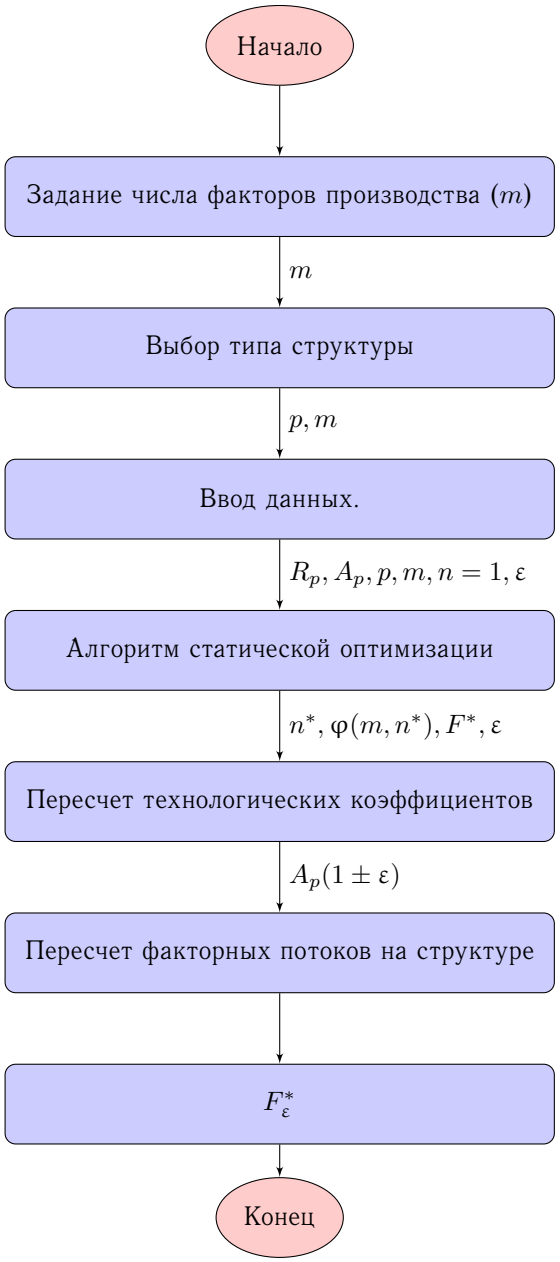

Рисунок 3.12 — Блок-схема алгоритма имитационного моделирования зависимости оптимальных симметричных иерархических структур от параметров

Описание основных блоков алгоритма 3.12:

Задание числа факторов производства (m)**.**

Описание. Ввод параметра m, характеризующего векторную природу макро-

экономических факторов производства.

Выход. Параметр m.

Выбор типа структуры.

Описание. Выбирается один из видов структурных графов: универсальный преобразователь (S_0), сложный преобразователь (S_1), комплексный преобразователь (S_3) или специализированный преобразователь (S_3).

Выход. Параметр $p = \overline{1,3}$, идентифицирующий тип структуры S_p.

Ввод данных.

Описание. В зависимости от выбранного типа структуры (параметр p) задаются величины факторов производства, значения технологических коэффициентов:

- $p = 0$: $R_0 = \{\{R^k\}_{k=1}^m\}$ — исходные факторы производства,
  $A_0 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 1$: $R_1 = \{N, \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_1 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 2$: $R_2 = \{N, \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}, \{R^k\}_{k=1}^{m-1}, \{\{R^k R^l\}_{k=1}^{m-1}\}_{l=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_2 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 3$: $R_3 = \{N, \{R^k\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_3 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.

Так же задается предельная сложность структуры ($n_{\max}$) и начальное значение параметра $n = 1$, так же параметр характеризующий неопределённость ε.

Выход. $R_p, A_p, p, m, n = 1$.

Алгоритм статической оптимизации.

Описание. Алгоритм заключается в формировании балансовых соотношений задачи ЛП для входных параметров, а так же решение задач ЛП для множества входных параметров, поиск оптимальной структуры n^*.

Выход. Максимум целевой функции F^*, оптимальная структура n^* и оптимальный вектор факторных потоков на оптимальной структуре $\varphi^*(n^*, m)$.

Пересчет технологических коэффициентов.

Описание. Пересчет технологических коэффициентов в зависимости от параметра ε.

Выход. Следующие значения технологических коэффициентов:

- $p = 0$: $A_0(1 \pm \varepsilon) = \{\{\{\{a_{ij}^l(1 \pm \varepsilon)\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j(1 \pm \varepsilon)\}_{j=1}^m\}$.
- $p = 1$: $A_1(1 \pm \varepsilon) = \{\{\{a_i^l(1 \pm \varepsilon)\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m, \{A^j(1 \pm \varepsilon)\}_{j=0}^{m-1}\}$.
- $p = 2$: $A_2(1 \pm \varepsilon) = \{\{\{\{a_{ij}^l(1 \pm \varepsilon)\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j(1 \pm \varepsilon)\}_{j=0}^{m-1}\}$.
- $p = 3$: $A_3(1 \pm \varepsilon) = \{\{\{a_i^l(1 \pm \varepsilon)\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m\}$.

Пересчет факторных потоков на структуре.

Описание. Пересчет факторных потоков на структуре для новых значений технологических коэффициентов.

Выход. Значение F_ε^*.

Структура и блок-схема задачи поиска оптимальных динамических режимов

Описание основных блоков алгоритма 3.13:

Задание числа факторов производства (m)**.**

Описание. Ввод параметра m, характеризующего векторную природу макро-

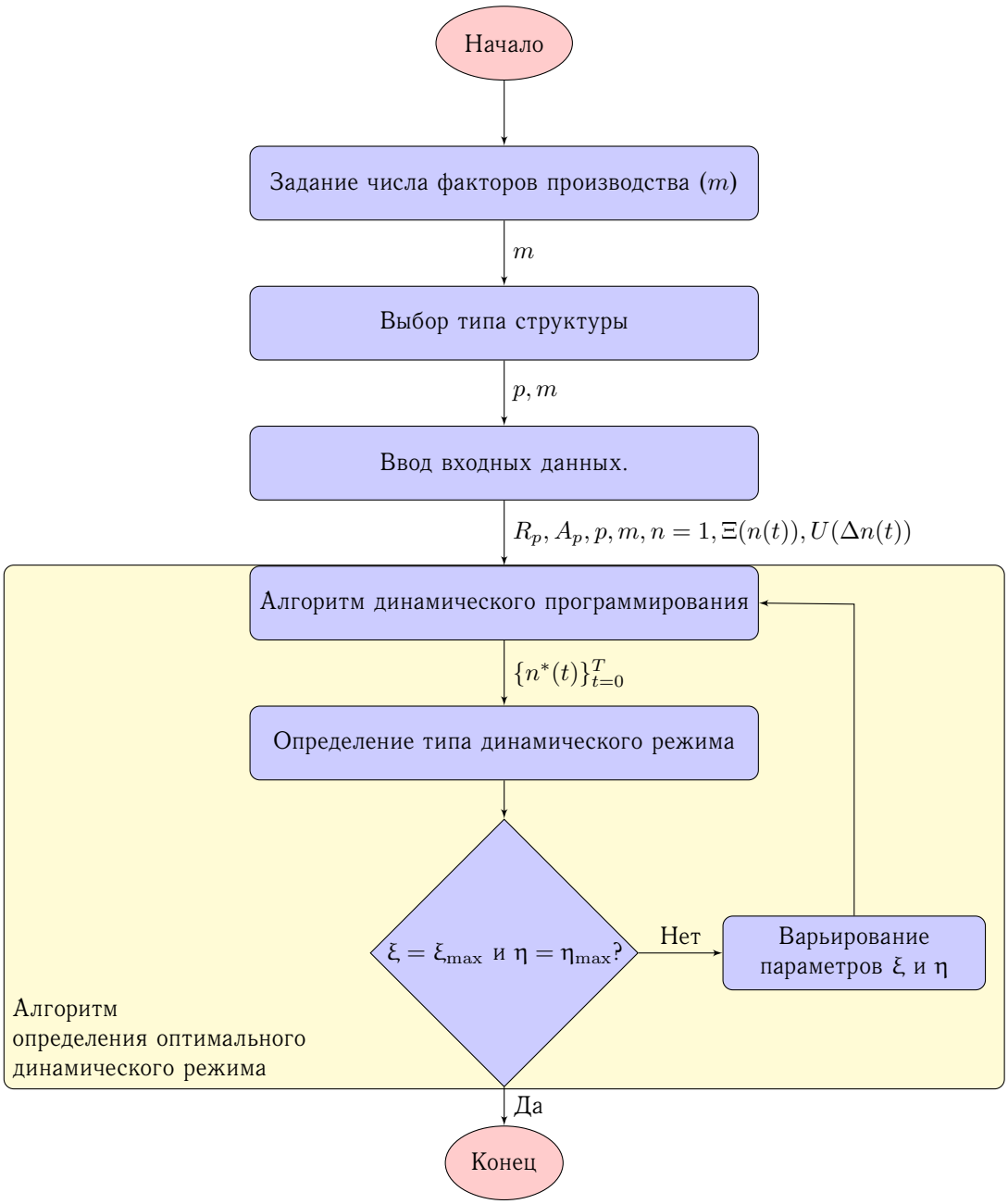

Рисунок 3.13 — Блок-схема задачи поиска оптимальных динамических режимов

экономических факторов производства.

Выход. Параметр m.

Выбор типа структуры.

Описание. Выбирается один из видов структурных графов: универсальный преобразователь (S_0), сложный преобразователь (S_1), комплексный преобразователь (S_3) или специализированный преобразователь (S_3).

Выход. Параметр $p = \overline{1,3}$, идентифицирующий тип структуры S_p.

Ввод данных.

Описание. Задается временной интервал T. В зависимости от выбранного типа структуры (параметр p) задаются временные ряды факторов производства, значения технологических коэффициентов:

- $p = 0$: $R_0 = \{\{R^k(t)\}_{k=1}^m\}$ — исходные факторы производства,
  $A_0 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 1$: $R_1 = \{N, \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_1 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 2$: $R_2 = \{N(t), \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}, \{R^k(t)\}_{k=1}^{m-1}, \{\{R^k R^l\}_{k=1}^{m-1}\}_{l=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_2 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 3$: $R_3 = \{N(t), \{R^k\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_3 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.

Так же задается предельная сложность структуры ($n_{\max}$) и начальное значение параметра $n = 1$.

Задаются предельная сложность структуры ($n_{\max}$), начальное значение параметра $n = 1$, $\xi = \xi_{min}$, $\eta = \eta_{min}$, предельные значения параметров ($\xi_{\max}, \eta_{\max},$), задаются функции затрат на управление $\Xi(n(t))$ и затрат на изменение (перестроение) $U(\Delta n(t))$.

Выход. $R_p, A_p, p, m, n = 1, \Xi(n(t)), U(\Delta n(t))$.

Алгоритм динамического программирования.

Описание. Методом многошагового динамического программирования решается задача оптимального управления иерархической структурой производственной подсистемы.

Выход. Оптимальный временной ряд иерархической структурой производственной подсистемы $\{n^*(t)\}_{t=0}^T$.

Определение типа динамического режима.

Вычисляются значения параметров, характеризующих среднюю сложность $\mu = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T} n^*(t)$ и среднюю изменчивость структуры $\delta = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} |n^*(t+1) - n^*(t)|$. По значениям параметров μ и δ однозначно определяется тип динамического режима:

- Динамические режимы ($\delta > 0$):

  1. следящий динамический режим (режим, в котором оптимальная траектория $n^*(t)$ совпадает с соответствующей траекторией вырожденной задачи (2.3.0))

     (I, $\mu = \mu_0, \delta = \delta_0$).

  2. динамический режим с упрощенной иерархической структурой производственной подсистемы

     (II, $\mu < \mu_0, \delta \leq \delta_0$).

  3. динамический режим с усложненной иерархической структурой производственной подсистемы

     (III, $\mu > \mu_0, \delta \leq \delta_0$).

- Стационарные режимы:

  1. режим с простейшей иерархической структурой производственной подсистемы ($\delta = \frac{|n^*(1)-n^*(0)|}{T}$)

     (IV, $n(t_0) = n_0$, $n^*(t) = 1$, $\forall t > t_0$).

  2. режим с начальной структурой иерархической структурой производственной подсистемы ($\delta = 0$)

     (V, $n^*(t) = n_0$).

     Отмечается в текущей точке (ξ, η) маркер соответствующий определенному динамическому режиму.

     $\xi = \xi_{\max}$ **и** $\eta = \eta_{\max}$**?**

     Происходит проверка достижения границ области

$$D = \{(\xi, \eta) : \xi_{min} \le \xi \le \xi_{max} \wedge \eta_{min} \le \eta \le \eta_{max}\}.$$

Структура и блок-схема имитационного моделирования неопределенности и решения задачи оптимального управления многошаговым методом динамического программирования

Описание основных блоков алгоритма 3.14:

Задание числа факторов производства (m)**.**

Описание. Ввод параметра m, характеризующего векторную природу макроэкономических факторов производства.

Выход. Параметр m.

Выбор типа структуры.

Описание. Выбирается один из видов структурных графов: универсальный преобразователь (S_0), сложный преобразователь (S_1), комплексный преобразователь (S_3) или специализированный преобразователь (S_3).

Выход. Параметр $p = \overline{1,3}$, идентифицирующий тип структуры S_p.

Ввод данных.

Описание. Задается временной интервал T. В зависимости от выбранного типа структуры (параметр p), задаются временные ряды факторов производства, значения технологических коэффициентов:

- $p = 0$: $R_0 = \{\{R^k(t)\}_{k=1}^m\}$ — исходные факторы производства,
  $A_0 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 1$: $R_1 = \{N, \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,
  $A_1 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.

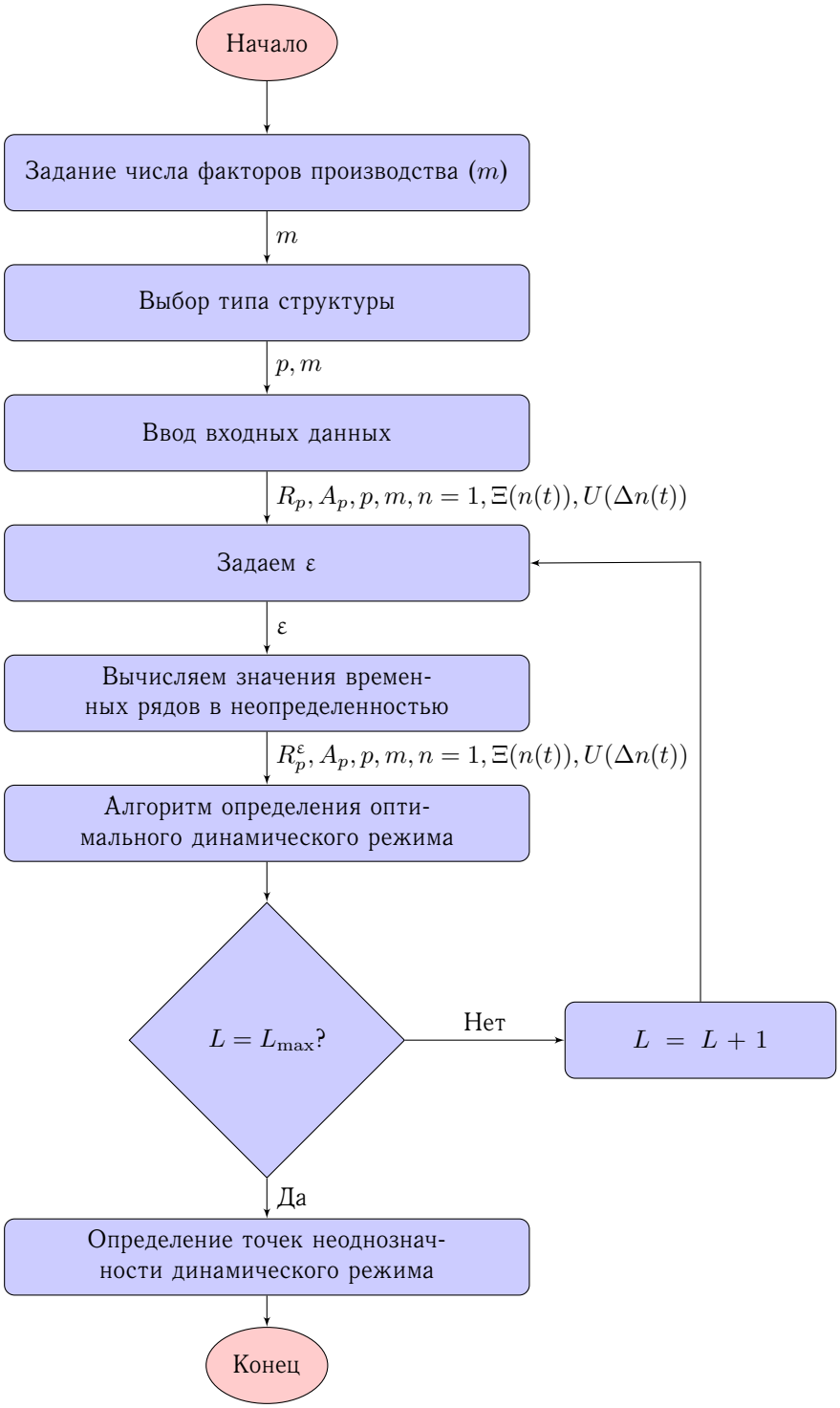

Рисунок 3.14 — Блок-схема имитационного моделирования неопределенности и решения задачи оптимального управления многошаговым методом динамического программирования

- $p = 2$: $R_2 = \{N(t), \{R^k N\}_{k=1}^{m-1}, \{R^k(t)\}_{k=1}^{m-1}, \{\{R^k R^l\}_{k=1}^{m-1}\}_{l=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,

  $A_2 = \{\{\{\{a_{ij}^l\}_{i=1}^n\}_{j=1}^m\}_{l=1}^m, \{A^j\}_{j=0}^{m-1}\}$ — технологические коэффициенты.
- $p = 3$: $R_3 = \{N(t), \{R^k\}_{k=1}^{m-1}\}$ — исходные факторы производства,

  $A_3 = \{\{\{a_i^l\}_{i=1}^n\}_{l=1}^m\}$ — технологические коэффициенты.

Так же задается предельная сложность структуры ($n_{\max}$) и начальное значение параметра $n = 1$.

Задаются предельная сложность структуры ($n_{\max}$), начальное значение параметра $n = 1$, $\xi = \xi_{min}$, $\eta = \eta_{min}$, предельные значения параметров ($\xi_{\max}, \eta_{\max},$), задаются функции затрат на управление $\Xi(n(t))$ и затрат на изменение (перестроение) $U(\Delta n(t))$, диапазон значений параметра, характеризующего неопределенность $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, предельное количество повторений алгоритма $K_{\max}$, $K = 0$, матрицы индикаторов неоднозначности определения динамического режима $M^I = 0$, M^I, M^{II}, M^{III}, M^{IV}, M^V размерности $n_\eta \times n_\xi$.

Выход. $R_p, A_p, p, m, n = 1, \Xi(n(t)), U(\Delta n(t))$.

Задаем ε.

Задаем случайное значение параметра характеризующего неопределенность ε из заданного диапазона.

Вычисляем значения временных рядов с неопределенностью.

Умножаем все значения временных рядов факторов производства на величину $(1 \pm \varepsilon)$.

$K = K_{\max}$**?.**

Проверка числа повторений алгоритма.

Определение точек неоднозначности динамического режима.

$M_{ij}^l = 1$, если в точке (ξ_j, η_i) оптимальным является режим $l = \overline{I, V}$, иначе

$M_{ij}^{l} = 0$.

$$M = \sum_{l=\overline{I,V}} M^{l},$$

элементы M_{ij} — показатели неоднозначности определения оптимального динамического режима в точке (ξ_j, η_i). Если $M_{ij} = 1$, то в точке (ξ_j, η_i) нет неоднозначности, если $M_{ij} > 1$, то в точке (ξ_j, η_i) существует неоднозначность определения оптимального динамического режима.

Структура программного комплекса оптимизации структуры русел пойменных территорий

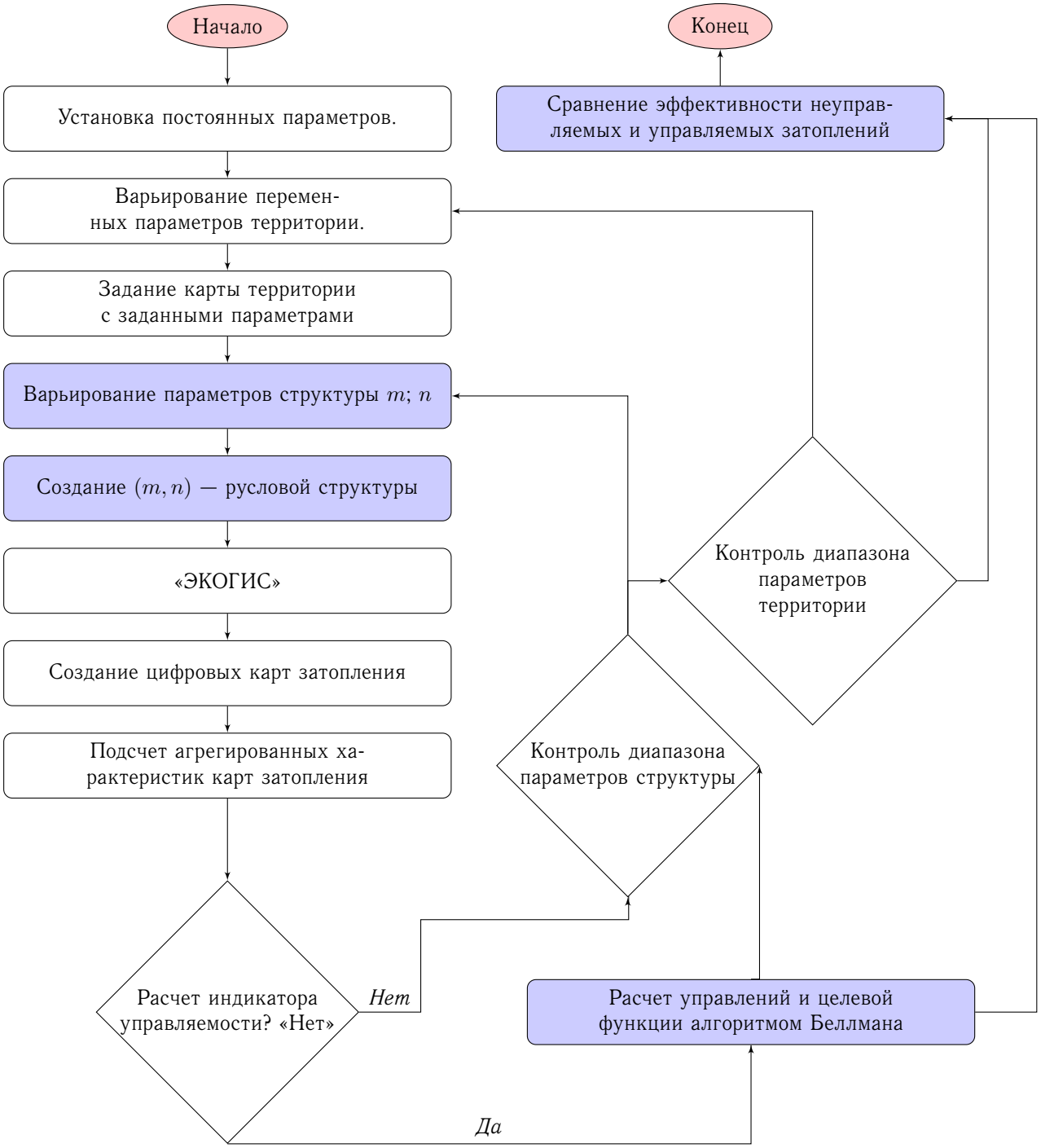

Рисунок 3.15 — Блок-схема алгоритма оптимизации структуры русел пойменных территорий. Автору принадлежат

Описание основных блоков алгоритма 3.15:

Установка постоянных параметров. (Авторы Бакулин В.С., Васильченко А.А.)

Описание. Задаются основные параметры: расход воды через входное русло территории Q_0; объем паводковых вод $V_0^{\max}$; время паводка T; параметр, характеризующий неопределенность E; параметры ограничения на сложность структуры $m_{\max}$ и $n_{\max}$; начальные значения структуры $n = 1$, $m = 1$; уклон λ°, диаметры $d(n)$ и глубина русел $h(n)$.

Выход. Q_0, $V_0^{\max}$, T,$n = 1$, $m = 1$, $d(n)$, $h(n)$.

Варьирование переменных параметров территории. (Авторы Бакулин В.С., Васильченко А.А.)

Описание. Изменяются значения размера территории L; высот Δb_{ij}; коэффициента относительной экологической ценности $a_{\max}$.

Выход. L; Δb_{ij}; $a_{\max}$.

Задание карты территории с заданными параметрами. (Авторы Бакулин В.С., Васильченко А.А.)

Описание. Создание цифровой модели рельефа территории с заданными параметрами.

Выход. Цифровая модель рельефа.

Варьирование параметров структуры m; n.

Описание. Вычисляются новые значения параметров структуры m и n (перебор).

Выход. m; n

Создание (m, n) — русловой структуры.

Описание. Создание (m, n)-разбиения территории и русловой структуры для заданных значений параметров.

Выход. Создание цифровой модели рельефа с (m, n)-разбиением территории.

«ЭКОГИС». (Авторы Писарев А.В., Хоперсков А.В., Храпов С.С.)

Описание. Запуск модуля гидродинамического моделирования «ЭКОГИС» с заданными параметрами. $K(t_k)$, $t_k = 10^3 k$, $k = \overline{1,500}$.

Выход. Цифровая карта затопления территории.

Создание цифровых карт затопления. (Авторы Писарев А.В., Хоперсков А.В., Храпов С.С.)

Описание. Создание серии цифровых карт затопления $K(t_k)$, $t_k = 10^3 k$, $k = \overline{1,500}$ с заданными параметрами территории и паводка.

Выход. Серия цифровых карт затопления.

Подсчет агрегированных характеристик карт затопления.(Авторы Писарев А.В., Хоперсков А.В., Храпов С.С.)

Описание. Подсчет агрегированных характеристик для каждой карты затопления $K(t_k)$, $t_k = 10^3 k$, $k = \overline{1,500}$ (зависимости площади затопленной территории каждой зоны от объема воды, поступившей в соответствующее ей русло и трансграничных объемов вод)

Выход. Функция зависимости площади затопленной территории от объема воды, поступившей в соответствующее ей русло: $S_{i_n}^{zat} = \varphi_{i_n}(V_{i_n})$

Расчет индикатора управляемости? (Авторы Бакулин В.С., Васильченко А.А.)

Описание. Проводится контроль эффекта межзонного затопления, если относительный эффект превышает 5%, то процесс затопления считается неуправляемым.

Выход. «Да» / «Нет».

Контроль диапазона параметров структуры. (Авторы Бакулин В.С., Васильченко А.А.)

Описание. Проверка, достигнута ли предельная сложность структуры.

Выход. • Если «Да», то **Контроль диапазона параметров территории**.

• Если «Нет», то **Варьирование параметров структуры** m**;** n.

Расчет управлений и целевой функции алгоритмом Беллмана.

Описание. Поиск решения оптимизационной задачи рекурсивным (по глубине (m,n)-дерева) численным многошаговым (с дискретизацией величин объема паводковых вод ΔV_{i_n}) методом динамического программирования (рекурсией по ширине (m,n)-дерева).

Выход. Значения управлений и целевой функции для текущей (m,n)-структуры.

Контроль диапазона параметров территории. (Авторы Бакулин В.С., Васильченко А.А.)

Описание. Производится контроль выхода варьируемых параметров за границы диапазонов.

Выход. • Если «Да», то **Варьирование переменных параметров территории.**

• Если «Нет», то **Сравнение эффективности неуправляемых и управляемых затоплений.**

Сравнение эффективности неуправляемых и управляемых затоплений.

Описание. Сравнение значений целевых функций и определение оптимальных значений m; n для неуправляемых и управляемых сечений русел.

Выход. Оптимальное значение целевой функции.

Приложение Б. Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013618134

Программа расчета оптимальной структуры профессорско-преподавательского состава кафедры вуза

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный университет» (RU)***

Авторы: ***Решетникова Ирина Михайловна (RU), Корольков Сергей Алексеевич (RU), Харитонов Михаил Алексеевич (RU), Широкий Александр Александрович (RU)***

Заявка № **2013616553**
Дата поступления **25 июля 2013 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***30 августа 2013 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

RU 2017660502

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2017660502

Дата регистрации: **22.09.2017**

Номер и дата поступления заявки:
2017616019 23.06.2017

Дата публикации: **22.09.2017**

Контактные реквизиты:
kharitonov.mihail@gmail.com

Автор:
Харитонов Михаил Алексеевич (RU)

Правообладатель:
Харитонов Михаил Алексеевич (RU)

Название программы для ЭВМ:
«Программа для оптимизации и оптимального управления иерархической структурой производственной подсистемы предприятия»

Реферат:
Реализован алгоритм численного решения задачи структурно-параметрического синтеза оптимальных структур производственных подсистем предприятия с рекурсивно определенными структурнозависимыми целевыми функциями, представимыми в виде суперпозиций элементарных целевых функций, заданных в их вершинах. Оптимальная структура отвечает оптимальной размерности семейства задач выпуклого программирования, осуществляющих оптимизацию потоков на каждой фиксированной структуре производственной подсистеме предприятия. На основе данного алгоритма решается задача оптимального управления структурой производственной подсистемой предприятия.

Тип реализующей ЭВМ:	IBM PC - совмест. ПК
Язык программирования:	C, C++
Вид и версия операционной системы:	Windows XP/Vista/7/8/10
Объем программы для ЭВМ:	60416 байт

Приложение В. Акты внедрения

ООО «МИТ»
г.Волгоград,
пр-т. Университетский,
д.100, 400062

Акт внедрения результатов
диссертационной работы на соискание
ученой степени кандидата технических наук

Созданный Михаилом Алексеевичем Харитоновым программный комплекс, реализующий алгоритм оптимального управления русловой структурой пойменной территории, а также результаты выполненной им диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата технических наук на тему: «Модели и алгоритмы управления структурой симметричных потоковых иерархий» используются в ООО «МИТ» при поиске оптимального паводкового гидрологического режима Волго-Ахтубинской поймы в широком диапазоне параметров весеннего паводка.

Директор ООО «МИТ» С.С. Храпов

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор ФГАОУ ВО
«Волгоградский государственный университет»
Доктор экономических наук, профессор
_____ А.Э. Калинина
«11» сентября 2017

АКТ

О внедрении результатов кандидатской диссертационной работы

Харитонова Михаила Алексеевича в работу управления экономики Волгоградского государственного университета

Результаты диссертационной работы «Модели и алгоритмы управления структурой симметричных потоковых иерархий» используются при расчете оптимальной структуры профессорско-преподавательского состава кафедр Волгоградского государственного университета.

Проректор по финансово-экономической работе _____ Филипенко Н.В.